

3 (1)

(i) まず3点 P, Q, R が正八角形の頂点と一致する場合についてのみ考えればよいことを示す。

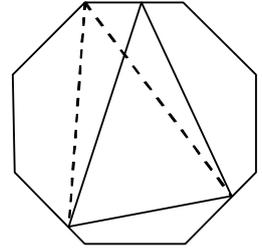
右図のように、点 P が頂点を除く辺上にあるとき、この辺の両端を B, C と名づける。

辺 BC と辺 QR が平行のとき、 $\triangle BQR = \triangle PQR$

辺 BC と辺 QR が平行でないとき、B, C のうち QR からの距離が大きい方の点を B と名づけるとすると、 $\triangle BQR > \triangle PQR$

いずれにせよ $\triangle BQR \geq \triangle PQR$ が成り立つ。

このことは他の頂点 Q, R についても同様に成り立つから、 $\triangle PQR$ の面積の最大値は、3点 P, Q, R が正八角形の頂点と一致する場合についてのみ考えればよい。

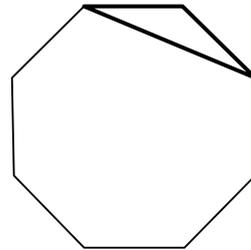


(ii) 次に3点 P, Q, R の配置について、間にある正八角形の辺の数の組について分類すると

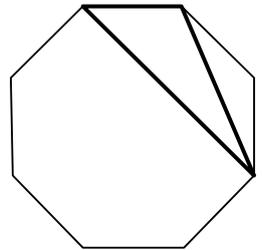
(6, 1, 1), (5, 2, 1), (4, 3, 1), (4, 2, 2), (3, 3, 2)

の5つのタイプがある。

右図の2つのタイプについては、辺 PQ に関して点 R を反対側の頂点に移した三角形の方が面積が大きいことは明らか。



(6, 1, 1)



(5, 2, 1)

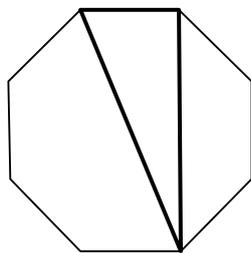
下図の3つのタイプについて、

$\triangle PQR$ の面積をそれぞれ S_1, S_2, S_3 とすると

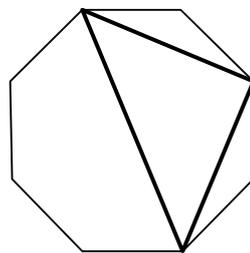
S_1 と S_2 については、PQ を底辺とみなすと $S_1 < S_2$

S_2 と S_3 については、PR を底辺とみなすと $S_2 < S_3$

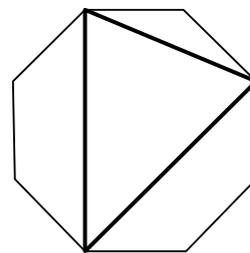
すなわち S_3 が最大となり、
$$S_3 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{4 + 3\sqrt{2}}{4} \dots (\text{答})$$



(4, 3, 1)



(4, 2, 2)



(3, 3, 2)

(2) 直角三角形 PQR の斜辺 PR が一定のとき、面積が最大となるのは、 $QP = QR$ のときであり、また、正八角形の最長の対角線に一致するとき、PQ の長さが最大となる。最大値は

$$\triangle A_1 A_3 A_7 = S_2 = \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \right\} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \dots (\text{答})$$