

**問題** 鋭角三角形  $ABC$  の垂心を  $H$  とし、 $W$  を辺  $BC$  上の ( $B$ ,  $C$  と異なる) 点とする。  $B$  から  $AC$  へ下ろした垂線の足を  $M$ ,  $C$  から  $AB$  へ下ろした垂線の足を  $N$  とする。  $\omega_1$  を三角形  $BWN$  の外接円とし、  $\omega_1$  上の点  $X$  を  $WX$  が  $\omega_1$  の直径であるようにとる。同様に、  $\omega_2$  を三角形  $CWM$  の外接円とし、  $\omega_2$  上の点  $Y$  を  $WY$  が  $\omega_2$  の直径であるようにとる。  $X$ ,  $Y$ ,  $H$  は同一直線上にあることを示せ。 [国際数学オリンピック2013 第4問]

**証明** 円  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  の交点のうち  $W$  と異なるものを  $Z$  とし、まず、  $A$ ,  $Z$ ,  $W$  が同一直線上にあることを示す。

$$\angle NZW = 180^\circ - \angle ABC$$

$$\angle MZW = 180^\circ - \angle ACB$$

これらから

$$\angle NZM = 360^\circ - (\angle NZW + \angle MZW)$$

$$= \angle ABC + \angle ACB$$

$$= 180^\circ - \angle BAC$$

よって、  $Z$  は  $\triangle ANM$  の外接円 ( $\omega_3$  とする) 上にある。さらに、  $AH$  は  $\omega_3$  の直径である。

また、  $\angle BMC = \angle BNC = 90^\circ$  だから 4 点  $B$ ,  $C$ ,  $M$ ,  $N$  も同一円周上にあり

$$\angle AZN = \angle AMN = \angle ABC$$

$$\text{よって } \angle AZN + \angle NZW = \angle ABC + \angle NZW = 180^\circ$$

すなわち、  $A$ ,  $Z$ ,  $W$  は同一直線上にある。

次に、  $X$ ,  $H$ ,  $Z$  について、  $XW$  は  $\omega_1$  の、  $AH$  は  $\omega_3$  の直径であるから

$$\angle XZW = 90^\circ, \angle AZH = 90^\circ$$

よって、  $X$ ,  $H$ ,  $Z$  は同一直線上にある。同様にして、  $Y$ ,  $H$ ,  $Z$  も同一直線上にある。

したがって、  $X$ ,  $Y$ ,  $H$  は同一直線上にある。

(証明終)

