

問題 $AB > AC$ なる三角形 ABC があり、 $\angle BAC$ の二等分線と辺 BC の交点を D とおく。さらに線分 AD の垂直二等分線と辺 AB, AC の交点をそれぞれ E, F とし、辺 BC 上に点 X を $BX : XC = BE : CF$ をみたすようにとる。また、三角形 ABC の外接円と直線 AX の交点のうち A でない方を Y とし、 $BC = a, CA = b, AB = c$ とする。このとき、三角形 ADY の外接円の半径を a, b, c を用いて表せ。ただし、 ZW で線分 ZW の長さを表すものとする。

(2014年 第12回 日本ジュニア数学オリンピック予選問題 12)

解答 四角形 $AEDF$ はひし形となり

$$AB \parallel FD, AC \parallel ED$$

また AD は $\angle BAC$ の二等分線だから

$$\begin{aligned} BD : DC &= BE : EA = AF : FC \\ &= AB : AC = c : b \end{aligned}$$

これらから

$$BE = AB \times \frac{c}{b+c} = \frac{c^2}{b+c},$$

$$CF = AC \times \frac{b}{b+c} = \frac{b^2}{b+c}$$

また $BX : XC = \triangle ABY : \triangle ACY = BA \cdot BY : CA \cdot CY$

$$\text{すなわち } c^2 : b^2 = c \cdot BY : b \cdot CY \text{ よって } BY : CY = c : b$$

直線 BC と EF の交点を P とすると、 P は AD の垂直二等分線上の点だから

$$PA = PD \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

また、右図のように $\angle CBA = \angle CAP$ となるから接弦定理の逆により、 PA は $\triangle ABC$ の外接円 O の A における接線である。次に、 $\triangle ABC$ と直線 EP についてメネラウスの定理を用いると

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CF}{FA} \cdot \frac{AE}{EB} = 1 \text{ よって } \frac{BP}{PC} = \frac{c^2}{b^2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

直線 BC と Y における円 O の接線との交点を Q とすると、 $\triangle BYQ \sim \triangle CYQ$ で相似比は $BY : CY = c : b$

$$\frac{BQ}{QC} = \frac{\triangle CYQ}{\triangle BYQ} = \frac{c^2}{b^2}$$

これと②より P と Q は一致するから

$$PA = PY \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

①, ③ より $PA = PD = PY$, したがって、 P は $\triangle ADY$ の外接円の中心であり、求める半径は

$$DC + CP = BC \times \frac{b}{b+c} + BC \times \frac{b^2}{c^2 - b^2} = \frac{abc}{c^2 - b^2}$$

