

問題 正方形 ABCD があり、その対角線の交点を O とする。線分 OA, OB, OC, OD 上にそれぞれ点 P, Q, R, S があり、 $OP=3$, $OQ=5$, $OR=4$ をみたしている。直線 AB と直線 PQ の交点、直線 BC と直線 QR の交点、直線 CD と直線 RS の交点が同一直線上にあるとき、線分 OS の長さを求めよ。ただし、XY で線分 XY の長さを表すものとする。

(2014年 日本数学オリンピック予選 9)

解答 O を原点とする座標平面を考え、A, B, C, D の座標をそれぞれ $(a, 0)$, $(0, a)$, $(-a, 0)$, $(0, -a)$ とする。ここで a は $a > 5$ となる実数である。また題意より、 $P(3, 0)$, $Q(0, 5)$, $R(-4, 0)$ となる。

$$AB : y = -x + a \text{ と } PQ : y = -\frac{5}{3}x + 5 \text{ の}$$

$$\text{交点 E の座標は } \left(\frac{-3a + 15}{2}, \frac{5a - 15}{2} \right)$$

$$BC : y = x + a \text{ と } QR : y = \frac{5}{4}x + 5 \text{ の交点 F}$$

$$\text{の座標は } (4a - 20, 5a - 20)$$

直線 EF の方程式は

$$y = \frac{5}{11}x + \frac{35a - 120}{11}$$

EF と CD : $y = -x - a$ の交点 G の座標は

$$\left(\frac{-23a + 60}{8}, \frac{15a - 60}{8} \right)$$

直線 GR の方程式は

$$y = -\frac{15}{23}x - \frac{60}{23}$$

GR と y 軸との交点が S であるから、S の座標は $\left(0, -\frac{60}{23} \right)$

したがって、OS の長さは $\frac{60}{23}$ である。

