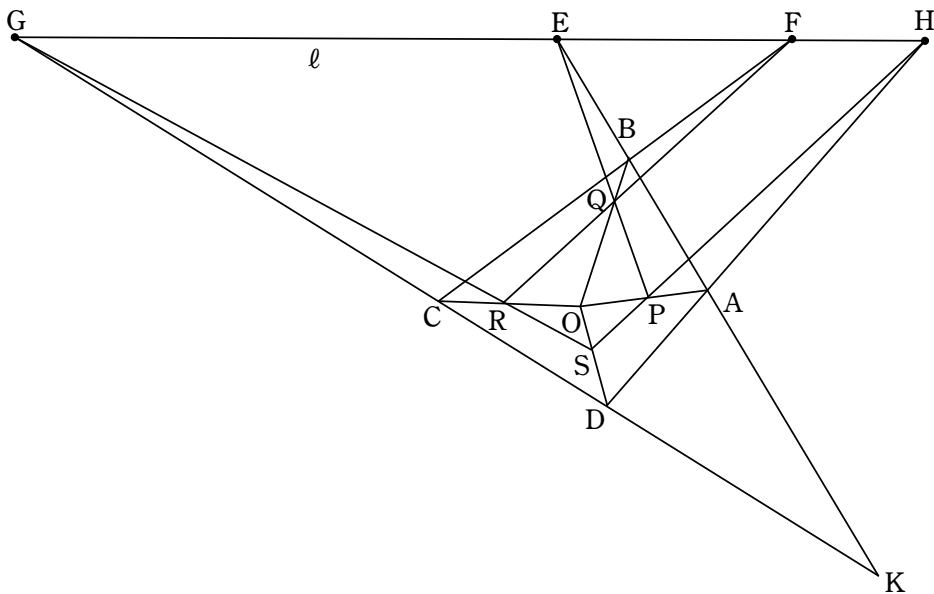


問題 四角形 ABCD の内部に点 O をとり、線分 OA, OB, OC, OD 上にそれぞれ点 P, Q, R, S をとる。2 直線 AB と PQ の交点を E, BC と QR の交点を F, CD と RS の交点を G, DA と SP の交点を H とする。3 点 E, F, G が同一直線 ℓ 上にあるならば、点 H も ℓ 上にあることを示せ。



解 上の図の配置について示す。

$OA=a, OB=b, OC=c, OD=d, OP=p, OQ=q, OR=r, OS=s$ とおく。

$\triangle OAB$ と直線 PQE についてメネラウスの定理を用いると

$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{b-q}{q} \cdot \frac{p}{a-p} = 1 \quad \text{から} \quad \frac{b-q}{q} \cdot \frac{p}{a-p} = \frac{AE-AB}{AE}$$

$$\frac{AB}{AE} = 1 - \frac{(b-q)p}{(a-p)q} \quad \text{よって} \quad \frac{AE}{AB} = \frac{(a-p)q}{aq-bp} \quad \dots\dots ①$$

$$\text{また} \quad \frac{BE}{AB} = \frac{AE-AB}{AB} = \frac{(a-p)q}{aq-bp} - 1 = \frac{(b-q)p}{aq-bp} \quad \dots\dots ①'$$

$\triangle OBC, \triangle OCD, \triangle ODA$ についても同様にして

$$\frac{BF}{FC} \cdot \frac{c-r}{r} \cdot \frac{q}{b-q} = 1 \quad \text{から} \quad \frac{BF}{BC} = -\frac{(b-q)r}{br-cq} \quad \dots\dots ②$$

$$\frac{CG}{GD} \cdot \frac{d-s}{s} \cdot \frac{r}{c-r} = 1 \quad \text{から} \quad \frac{CG}{CD} = -\frac{(c-r)s}{cs-dr} \quad \dots\dots ③$$

$$\text{また} \quad \frac{DG}{CD} = \frac{CD+CG}{CD} = 1 - \frac{(c-r)s}{cs-dr} = -\frac{(d-s)r}{cs-dr} \quad \dots\dots ③'$$

$$\frac{DH}{HA} \cdot \frac{a-p}{p} \cdot \frac{s}{d-s} = 1 \quad \text{から} \quad \frac{DH}{DA} = \frac{(d-s)p}{dp-as} \quad \dots\dots ④$$

2 直線 AB, CD の交点を K とする。E, F, G が ℓ 上にあるならば, ℓ と $\triangle KBC$ について

$$\frac{KE}{EB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CG}{GK} = 1 \quad \text{から} \quad \frac{KE}{EB} = \frac{FC}{BF} \cdot \frac{GK}{CG} \quad \dots\dots ⑤$$

が成り立つ。ここで

$$\frac{KE}{EB} = \frac{KB+BE}{BE} = 1 + \frac{AB}{BE} \cdot \frac{KB}{AB} = 1 + \frac{aq-bp}{(b-q)p} \cdot \frac{KB}{AB} \quad \dots\dots ⑥$$

$$\frac{FC}{BF} = \frac{BF+BC}{BF} = 1 + \frac{BC}{BF} = 1 - \frac{br-cq}{(b-q)r} = \frac{(c-r)q}{(b-q)r} \quad \dots\dots ⑦$$

$$\frac{GK}{CG} = \frac{CG+KC}{CG} = 1 + \frac{CD}{CG} \cdot \frac{KC}{CD} = 1 - \frac{cs-dr}{(c-r)s} \cdot \frac{KC}{CD} \quad \dots\dots ⑧$$

⑥, ⑦, ⑧ を ⑤ に代入して整理すると

$$(b-q)prs + (aq-bp)rs \frac{KB}{AB} = (c-r)pqs - (cs-dr)pq \frac{KC}{CD}$$

$$(b-q)prs + (aq-bp)rs \frac{KA+AB}{AB} = (c-r)pqs - (cs-dr)pq \frac{KD+CD}{CD}$$

$$\text{よって} \quad (a-p)qrs + (aq-bp)rs \frac{KA}{AB} = (d-s)pqr - (cs-dr)pq \frac{KD}{CD}$$

①, ③' を用いると

$$(aq-bp)rs \frac{AE}{AB} + (aq-bp)rs \frac{KA}{AB} = -(cs-dr)pq \frac{GD}{CD} - (cs-dr)pq \frac{KD}{CD}$$

$$(aq-bp)rs \frac{KE}{AB} = -(cs-dr)pq \frac{KG}{CD}$$

$$\text{さらに} \quad (a-p)q \frac{AB}{AE} \cdot rs \frac{KE}{AB} = (d-s)r \frac{CD}{GD} \cdot pq \frac{KG}{CD}$$

$$\text{よって} \quad (a-p)s \frac{KE}{EA} = (d-s)p \frac{KG}{GD} \quad \dots\dots ⑧'$$

最後に $\triangle KAD$ と ℓ について $\frac{KE}{EA} \cdot \frac{AH}{HD} \cdot \frac{DG}{GK} = 1 \quad \dots\dots ⑨$ となることを示す。

$$④ \text{ から} \quad \frac{AH}{HD} = \frac{HD-DA}{HD} = 1 - \frac{DA}{HD} = 1 - \frac{dp-as}{(d-s)p} = \frac{(a-p)s}{(d-s)p} \quad \dots\dots ⑩$$

$$⑧', ⑩ \text{ から} \quad \frac{KE}{EA} \cdot \frac{DG}{GK} = \frac{(d-s)p}{(a-p)s} = \frac{HD}{AH} \quad \text{したがって} \quad ⑨ \text{ が成り立つ。}$$

すなわち, 点 H は ℓ 上にある。