

[ 作図問題 ]

点 P を通る直線 DE で  $\triangle ABC$  の面積を二等分する。

[ 証明の方針 ]

$$ABC = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin A, \quad ADE = \frac{1}{2} AD \cdot AE \sin A$$

であるから,

$$ABC : ADE = 2 : 1, \quad AB \cdot AC : AD \cdot AE = 2 : 1$$

は同値。

$\triangle ADP \sim \triangle AQE$  から  
 $AD \cdot AE = AP \cdot AQ$  を示す。

[ 証明 ]

$$AM = \frac{1}{2} AB, \quad AC' = AC, \quad AQ' = AQ$$

であり,  $MP \parallel Q'C'$  より

$$AM : AQ' = AP : AC'$$

すなわち

$$\frac{1}{2} AB : AQ = AP : AC$$

$$\text{よって } AP \cdot AQ = \frac{1}{2} AB \cdot AC \dots$$

4点 S, P, Q, E は同一円周上にあり,  $\angle SQE = \angle PAE$ ,  $\angle BAP = \angle CAQ$  であるから

$$\angle PEQ = \angle PSQ = \angle PAE = \angle DAQ$$

すなわち  $\angle DEQ = \angle DAQ$  より  $\triangle ADE \sim \triangle AQE$

$\triangle ADP$  と  $\triangle AQE$  において,  $\angle DAP = \angle QAE$ ,  $\angle ADP = \angle AQE$  であるから

$$\triangle ADP \sim \triangle AQE$$

$$\text{よって } AD : AQ = AP : AE \text{ より } AD \cdot AE = AP \cdot AQ \dots$$

$$\text{よって } AD \cdot AE = \frac{1}{2} AB \cdot AC$$

$$\text{すなわち } ABC : ADE = AB \cdot AC : AD \cdot AE = 2 : 1$$

