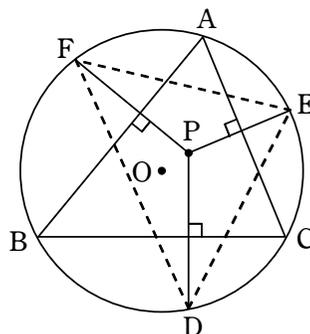
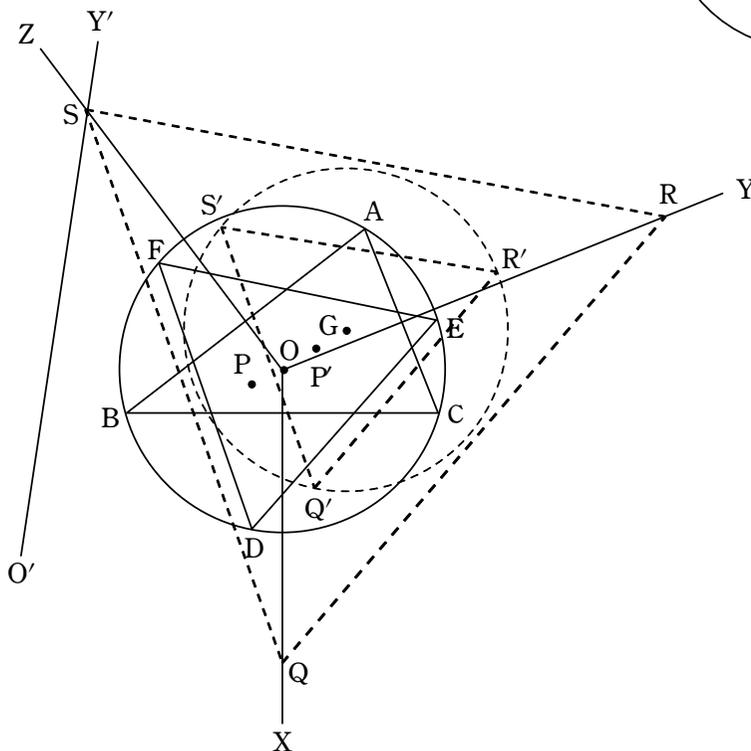


問題 $\triangle ABC$ とその外接円 O が与えられている。このとき、 $\triangle ABC$ の内部の点 P から BC , CA , AB に垂線をおろしその外接円との交点を D , E , F としたとき、 $\triangle DEF$ の面積を最大にするには P をどこにとればよいか。

『初等数学』課題 71-3



略解



$\triangle DEF$ の面積が最大となるのは正三角形のときであるから、 PD , PE , PF がそれぞれ BC , CA , AB に垂直であるような正三角形の作図を考えればよい。

- (1) $\triangle ABC$ の外心 O から辺 BC , CA , AB にそれぞれ垂線(半直線) OX , OY , OZ をひく。
(ここで、 OX , OY , OZ が互いになす角はすべて 60° より大きいものとする。
すなわち、 $\triangle ABC$ の内角はすべて 120° より小さいものとする。)
- (2) OX 上に適当に点 Q をとり、 Q を中心に OY を 60° だけ回転したものを $O'Y'$ とし、これと OZ との交点を S とする。 OY 上に点 R を $OR=OS$ となるようにとれば、 $\triangle QRS$ は正三角形である。
- (3) 正三角形 QRS の外心 G を中心とし半径が円 O に等しい円と QQ , GR , GS との交点をそれぞれ Q' , R' , S' とし、 OG 上に点 P' を $P'Q' \perp BC$ となるようにとる。
- (4) P' および $\triangle Q'R'S'$ を \overrightarrow{GO} だけ平行移動したものが求める P および $\triangle DEF$ である。