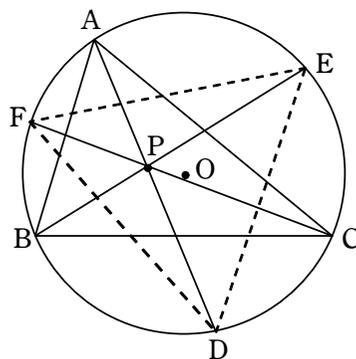


問題 $\triangle ABC$ の外接円 O の内部に点 P をとり、直線 AP, BP, CP と円 O の交点をそれぞれ D, E, F とする。 $\triangle DEF$ が正三角形になるためには P をどのようにとればよいか。



解答 点 P と正三角形 DEF が描けたとすると

$$\begin{aligned} \angle BPC &= \angle BAC + \angle ABP + \angle ACP \\ &= \angle BAC + \angle ADE + \angle ADF \\ &= \angle BAC + 60^\circ \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned} \angle CPA &= \angle CBA + 60^\circ \\ \angle APB &= \angle ACB + 60^\circ \end{aligned}$$

となる。

3点 B, P, C を通る円の中心を Q とすると、 Q は O から BC にひいた垂線 OS 上にあり

$$\begin{aligned} \angle BPC &= \angle SQC \\ \text{一方 } \angle SQC &= \angle QOC + \angle OCQ \\ &= \angle BAC + \angle OCQ \end{aligned}$$

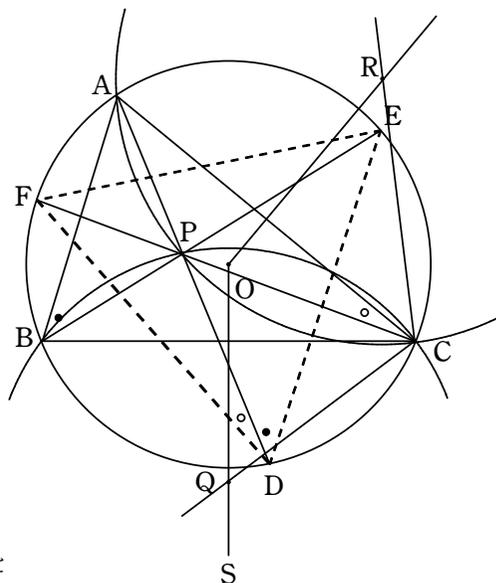
これと ① から

$$\angle OCQ = 60^\circ \quad \dots\dots ②$$

同様に、3点 C, P, A を通る円の中心を R とすると、 R は O から CA にひいた垂線上にあり

$$\angle OCR = 60^\circ \quad \dots\dots ③$$

したがって、 P を求めるには、 O から BC, CA に垂線をひき、その上に Q, R を ②, ③ を満たすようにとる。 Q, R を中心に C を通る2つの円を描けば、その交点が P である。



実際の P の作図では、

$$\angle OBQ = \angle OCQ = 60^\circ, \quad \angle OCR = \angle OAR = 60^\circ$$

を用いる方が効率がよい。