

正十七角形の頂点

複素数平面で単位円に内接する正十七角形を考える。

$\theta = \frac{2\pi}{17}$, $z = \cos \theta + i \sin \theta$ とすると, 正十七角形の

頂点を表す複素数は

$$z^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad (n=0, 1, 2, \dots, 16)$$

である。ここで

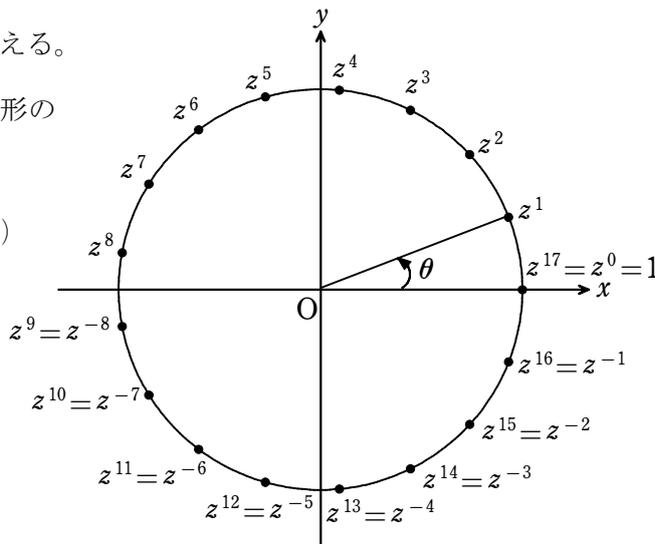
$$\begin{aligned} z^{17} &= \cos 17\theta + i \sin 17\theta \\ &= \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1 \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} \cos(17-n)\theta &= \cos(2\pi - n\theta) = \cos n\theta \\ \sin(17-n)\theta &= \sin(2\pi - n\theta) = -\sin n\theta \end{aligned}$$

であるから z^{17-n} と z^n は互いに共役であり, ① も用いると

$$z^{17-n} = \overline{z^n} = z^{17} \cdot z^{-n} = z^{-n} \quad \text{例として} \quad z^{14} = z^{17-3} = \overline{z^3} = z^{-3}$$



以下では $\cos \theta$ が有理数と平方根で表されることを示す。すると, 正十七角形が作図可能ということになる。

① から $z^{17}-1=0$ よって $(z-1)(z^{16}+z^{15}+\dots+z^2+z^1+1)=0$

$z = \cos \theta + i \sin \theta \neq 1$ であるから

$$z^1 + z^2 + \dots + z^{15} + z^{16} = -1 \quad \dots\dots ②$$

これは次のようにも表される。

$$z^1 + z^2 + \dots + z^8 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-8} = -1 \quad \dots\dots ②'$$

まず初めに

$$\alpha = z^1 + z^2 + z^4 + z^8 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-4} + z^{-8}$$

$$\beta = z^3 + z^5 + z^6 + z^7 + z^{-3} + z^{-5} + z^{-6} + z^{-7}$$

とおいて (注2), α, β を求める。②' より

$$\alpha + \beta = -1, \quad \alpha\beta = -4 \quad (\text{注1})$$

よって α, β は $x^2 + x - 4 = 0$ の2つの解であり $\alpha > \beta$ (注1) であるから

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \quad \beta = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$$

次に

$$\alpha_1 = z^1 + z^4 + z^{-1} + z^{-4}, \quad \alpha_2 = z^2 + z^8 + z^{-2} + z^{-8}$$

$$\beta_1 = z^3 + z^5 + z^{-3} + z^{-5}, \quad \beta_2 = z^6 + z^7 + z^{-6} + z^{-7}$$

とおくと

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha, \quad \alpha_1\alpha_2 = -1 \quad (\text{右表})$$

α_1, α_2 は $x^2 - \alpha x - 1 = 0$ の2つの解であり $\alpha_1 > \alpha_2$ であるから

$$\alpha_1 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4}}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4}}{2}$$

(注1) 参照

$\alpha_1\alpha_2 = -1$ の計算

	1	4	-1	-4
2	3	6	1	-2
8	-8	-5	7	4
-2	-1	2	-3	-6
-8	-7	-4	8	5

また

$$\beta_1 + \beta_2 = \beta, \quad \beta_1 \beta_2 = -1 \quad (\text{右表})$$

$\beta_1 \beta_2 = -1$ の計算

から同様にして

$$\beta_1 = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4}}{2}, \quad \beta_2 = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 + 4}}{2}$$

α, β は作図可能であり、よって $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ もすべて作図可能である。

	3	5	-3	-5
6	-8	-6	3	1
7	-7	-5	4	2
-6	-3	-1	8	6
-7	-4	-2	7	5

最後に $\alpha_1 = z^1 + z^4 + z^{-1} + z^{-4}$ について

$$r_1 = z^1 + z^{-1} = 2 \cos \theta, \quad r_2 = z^4 + z^{-4} = 2 \cos 4\theta$$

とおくと

$$r_1 + r_2 = \alpha_1 \left(= \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4}}{2} \right)$$

$$r_1 r_2 = (z^1 + z^{-1})(z^4 + z^{-4}) = z^5 + z^{-3} + z^3 + z^{-5} = \beta_1 \left(= \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4}}{2} \right)$$

r_1, r_2 は $x^2 - \alpha_1 x + \beta_1 = 0$ の2つの解であり $r_1 > r_2$ であるから

$$\frac{r_1}{2} = \cos \theta = \frac{\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - 4\beta_1}}{4}, \quad \frac{r_2}{2} = \cos 4\theta = \frac{\alpha_1 - \sqrt{\alpha_1^2 - 4\beta_1}}{4}$$

まとめると

$$\cos \theta = \frac{\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - 4\beta_1}}{4}, \quad \alpha_1 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4}}{2}, \quad \beta_1 = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4}}{2},$$

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \quad \beta = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$$

となり、 $\cos \theta$ が有理数と平方根で表されることから、正十七角形の実作図が可能となることわかる。

(注1) 積 $\alpha\beta = -4$ の計算 累乗の指数について積表をつくり②'を用いる。

	1	2	4	8	-1	-2	-4	-8	
3	4	5	7	-6	2	1	-1	-5	$\alpha > \beta$ について $\cos 2\theta > \cos 3\theta$ $\cos \theta + \cos 4\theta + \cos 8\theta \sim 0$ $\cos 5\theta + \cos 6\theta + \cos 7\theta \sim -1$
5	6	7	-8	-4	4	3	1	-3	
6	7	8	-7	-3	5	4	2	-2	
7	8	-8	-6	-2	6	5	3	-1	
-3	-2	-1	1	5	-4	-5	-7	6	
-5	-4	-3	-1	3	-6	-7	8	4	
-6	-5	-4	-2	2	-7	-8	7	3	
-7	-6	-5	-3	1	-8	8	6	2	

(注2) α, β の8つの項の選択について

ともに前の項の平方となり適時 $z^{17} = 1$ とする。 β では順序を変えてある。累乗の指数では

$$\alpha : 1 \xrightarrow[2\text{倍}]{\quad} 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 8 \longrightarrow 16 \longrightarrow 32 \equiv 15 \longrightarrow 30 \equiv 13 \longrightarrow 26 \equiv 9 \longrightarrow 18 \equiv 1 \pmod{17}$$

(-1)
(-2)
(-4)
(-8)

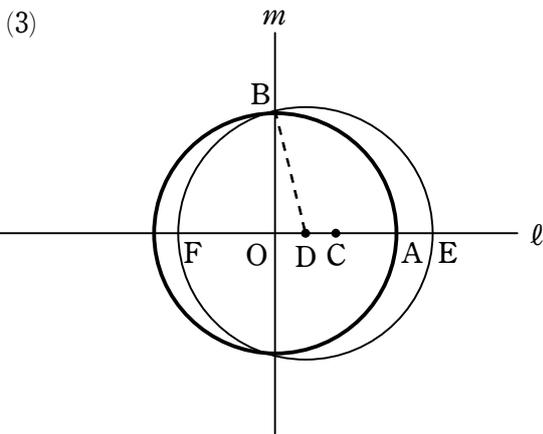
$$\beta : 3 \longrightarrow 6 \longrightarrow 12 \longrightarrow 24 \equiv 7 \longrightarrow 14 \longrightarrow 28 \equiv 11 \longrightarrow 22 \equiv 5 \longrightarrow 10 \longrightarrow 20 \equiv 3$$

(-5)
(-3)
(-6)
(-7)

このような選択で17次方程式の解ける理由が自分にはまだ理解できていません。

正十七角形の作図

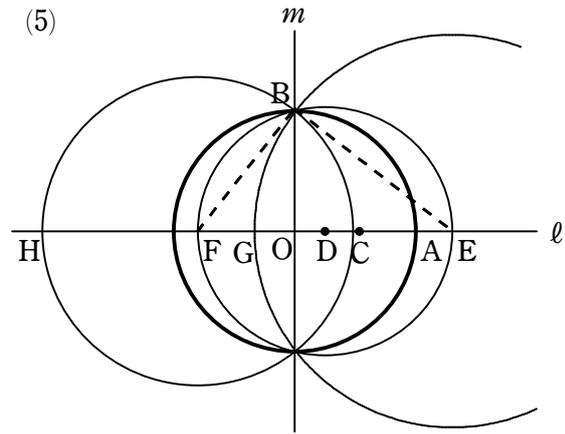
OA=OB=1 とする。



CはOAの中点, DはOCの中点

$$OD = \frac{1}{4} \text{ から } DB = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{17}}{4}$$

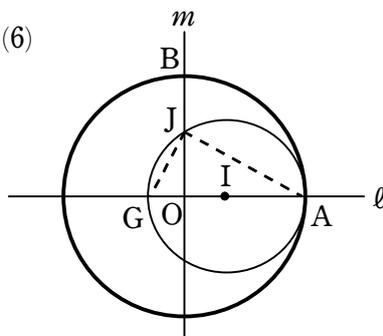
$$OE = \frac{\sqrt{17} + 1}{4} = -\frac{\beta}{2}, \quad OF = \frac{\sqrt{17} - 1}{4} = \frac{\alpha}{2}$$



$$EB = \sqrt{\left(-\frac{\beta}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{\beta^2 + 4}}{2}, \quad FB = \frac{\sqrt{\alpha^2 + 4}}{2}$$

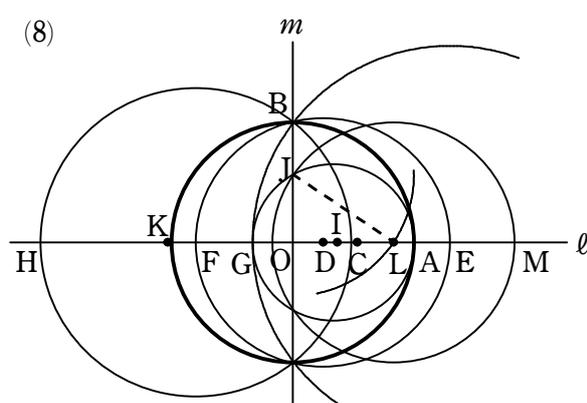
$$OG = EG - OE = EB - OE = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4}}{2} = \beta_1,$$

$$OH = OF + FH = OF + FB = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4}}{2} = \alpha_1$$



$$OA : OJ = OJ : OG$$

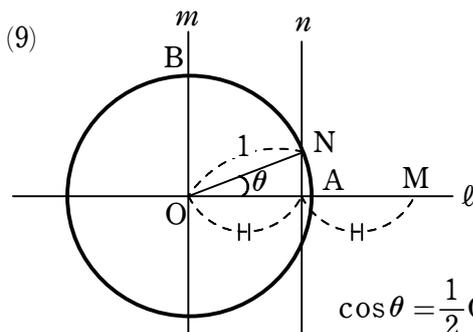
$$1 : OJ = OJ : \beta_1 \text{ よって } OJ = \sqrt{\beta_1}$$



$$K \text{ は } OH \text{ の中点だから } OK = \frac{\alpha_1}{2} = JL = LM$$

$$OL = \sqrt{\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)^2 - (\sqrt{\beta_1})^2} = \frac{\sqrt{\alpha_1^2 - 4\beta_1}}{2}$$

$$OM = OL + LM = \frac{\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - 4\beta_1}}{2}$$



$$\cos \theta = \frac{1}{2} OM = \frac{\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - 4\beta_1}}{4}$$