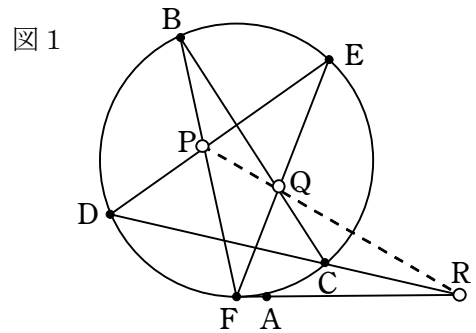


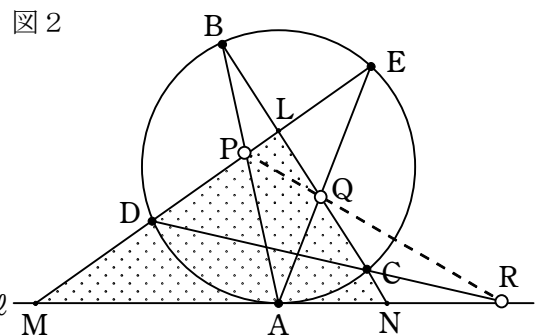
円周上に点における接線の作図（定規のみ）について

パスカルの定理の証明（F→Aの極限の場合）

右の図1のように、円周上に6点 A, B, C, D, E, F がある。直線 AB, DE の交点を P, 直線 BC, EF の交点を Q, 直線 CD, FA の交点を R とするとき、3点 P, Q, R は一直線上にある、というのがパスカルの定理である。



ここで F を円周上で A に限りなく近づけた極限では、図2のように直線 FA は A における接線 ℓ になる。この図について、3点 P, Q, R が一直線上にあることを証明する。



直線 BC, DE の交点を L, 直線 DE, ℓ の交点を M, 直線 BC, ℓ の交点を N とする。△LMN と直線 BPA についてメネラウスの定理を用いると

$$\frac{LP}{PM} \cdot \frac{MA}{AN} \cdot \frac{NB}{BL} = 1 \quad \dots\dots①$$

直線 EQA について

$$\frac{LE}{EM} \cdot \frac{MA}{AN} \cdot \frac{NQ}{QL} = 1 \quad \dots\dots②$$

直線 DCR について

$$\frac{LD}{DM} \cdot \frac{MR}{RN} \cdot \frac{NC}{CL} = 1 \quad \dots\dots③$$

①, ②, ③ を辺々かけあわせたものに、方べきの定理

$$LB \cdot LC = LD \cdot LE, \quad MD \cdot ME = MA^2, \quad NB \cdot NC = NA^2$$

を用いると

$$\frac{LP}{PM} \cdot \frac{MR}{RN} \cdot \frac{NQ}{QL} = 1$$

したがってメネラウスの定理の逆により3点 P, Q, R は一直線上にある。

接線の作図について

3直線 CD, ℓ, PQ は1点 R で交わる。すなわち、CD, PQ の交点は接線 ℓ 上にあるということを用いている。