

極と極線

円 O に外部の点 P から 2 本の接線をひき、接点を S, T とするとき、直線 ST を P に関する極線といい、 P を極という。 PO と円の交点を図のように C, D とし、 PO と ST の交点を H とする。円の半径を r 、 $PO=p$ とするとき、次式が成り立つ。

$$PS=PT=\sqrt{p^2-r^2}, \quad PC \cdot PD=PS^2 \quad (\text{方べきの定理より})$$

$\triangle PSO \sim \triangle PHS$ より

$$PS : PH = PO : PS$$

$$\text{よって } PH \cdot PO = PS^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\triangle OHS \sim \triangle OSP$ より

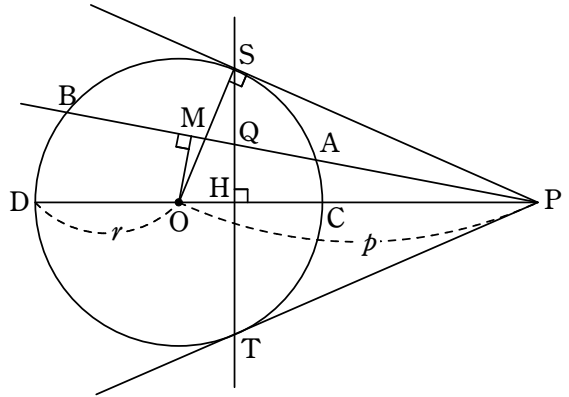
$$OH : OS = OS : OP \quad \text{よって } OH = \frac{r^2}{p}$$

$$\text{また } PC = p - r, \quad CH = r - \frac{r^2}{p} = \frac{r(p-r)}{p}$$

$$PD = p + r, \quad DH = r + \frac{r^2}{p} = \frac{r(p+r)}{p}$$

$$\text{よって } PC : CH = PD : DH$$

(P, C, H, D は調和点列をなすという)



定理 P から円 O に直線をひき、図のように円との交点を A, B 、極線 ST との交点を Q とするとき $PA : AQ = PB : BQ$ が成り立つ。
(P, A, Q, B は調和点列をなす)

証明 AB の中点を M とすると $PM = \frac{1}{2}(PA + PB)$ また $PA \cdot PB = PS^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } PA \cdot PB = PH \cdot PO \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\angle OMQ = \angle OHQ = 90^\circ$ より 4 点 M, O, H, Q は同一円周上にあるから

$$PH \cdot PO = PQ \cdot PM \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ より } PA \cdot PB = PQ \cdot PM \quad \text{すなわち } 2PA \cdot PB = PQ \cdot (PA + PB)$$

ここで

$$\begin{aligned} PA \cdot BQ - AQ \cdot PB &= PA \cdot (PB - PQ) - (PQ - PA) \cdot PB \\ &= 2PA \cdot PB - (PA + PB) \cdot PQ = 0 \end{aligned}$$

すなわち $PA \cdot BQ = AQ \cdot PB$ したがって $PA : AQ = PB : BQ$ (証明終)

定理 点 P から円 O に 2 直線をひき、図のように交点を A, B および C, D とする。このとき、AC と BD の交点および AD と BC の交点は極線 ST 上にある。

証明 ST と PB, PD の交点をそれぞれ Q, R とし、ST と AC の交点を E, ST と BD の交点を F とする。

前項の定理により

$$PA : AQ = PB : BQ \quad \text{より} \quad \frac{PA}{AQ} = \frac{PB}{BQ}$$

$$PC : CR = PD : DR \quad \text{より} \quad \frac{RC}{CP} = \frac{RD}{DP}$$

辺々かけ合わせて

$$\frac{RC}{CP} \cdot \frac{PA}{AQ} = \frac{RD}{DP} \cdot \frac{PB}{BQ} \quad \dots\dots ⑤$$

△PSR と EC, FD について
メネラウスの定理を用いると

$$\frac{QE}{ER} \cdot \frac{RC}{CP} \cdot \frac{PA}{AQ} = 1 \quad \dots\dots ⑥$$

$$\frac{QF}{FR} \cdot \frac{RD}{DP} \cdot \frac{PB}{BQ} = 1$$

$$⑤ \text{ より } \frac{QE}{ER} = \frac{QF}{FR}$$

E と F は線分 QR を等しい比に外分するから一致する。すなわち、AC と BD の交点は極線 ST 上にある。

ST と AD, BC の交点をそれぞれ G, H とすると

$$\frac{QG}{GR} \cdot \frac{RD}{DP} \cdot \frac{PA}{AQ} = 1 \quad \dots\dots ⑦, \quad \frac{QH}{HR} \cdot \frac{RC}{CP} \cdot \frac{PB}{BQ} = 1$$

これらから G と H は一致するから、AD と BC の交点は極線 ST 上にある。

(証明終)

補足 ⑥, ⑦ より $\frac{QE}{ER} = \frac{CP}{RC} \cdot \frac{AQ}{PA}, \quad \frac{QG}{GR} = \frac{DP}{RD} \cdot \frac{AQ}{PA}$

$$\frac{RC}{CP} = \frac{RD}{DP} \quad \text{であるから} \quad \frac{QE}{ER} = \frac{QG}{GR}$$

すなわち、E, Q, G, R も調和点列をなす。

