

## 極値をもつ3次関数のグラフの概形

3次関数  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a \neq 0$ ) が極値をもつとき、グラフ  $y = f(x)$  の概形を考える。  
導関数は

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$f(x)$  が極値をもつとき  $f'(x) = 0$  が異なる2実数解をもつから、その解を  $\alpha, \beta$  ( $\alpha > \beta$ ) とすると

$$f'(x) = 3a(x - \alpha)(x - \beta)$$

と表される。いま、 $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$ ,  $\delta = \frac{\alpha - \beta}{2}$  とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3a \left\{ \left( x - \frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2 - \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)^2 \right\} \\ &= 3a \{ (x - \gamma)^2 - \delta^2 \} \end{aligned}$$

積分すると

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x - \gamma)^3 - 3a\delta^2 x + C \\ &= a(x - \gamma)^3 - 3a\delta^2(x - \gamma) + C - 3a\delta^2\gamma \end{aligned}$$

ここで  $x = \gamma$  とおくと  $f(\gamma) = C - 3a\delta^2\gamma$  だから

$$f(x) - f(\gamma) = a(x - \gamma)^3 - 3a\delta^2(x - \gamma)$$

$y = f(x)$  のグラフは変曲点  $(\gamma, f(\gamma))$  に関して対称。

$$f(\alpha) - f(\gamma) = f(\gamma + \delta) - f(\gamma) = a\delta^3 - 3a\delta^3 = -2a\delta^3$$

$$f(\gamma + 2\delta) - f(\gamma) = 8a\delta^3 - 3a\delta^2 \cdot 2\delta = 2a\delta^3$$

したがって右図のような概形になる。

