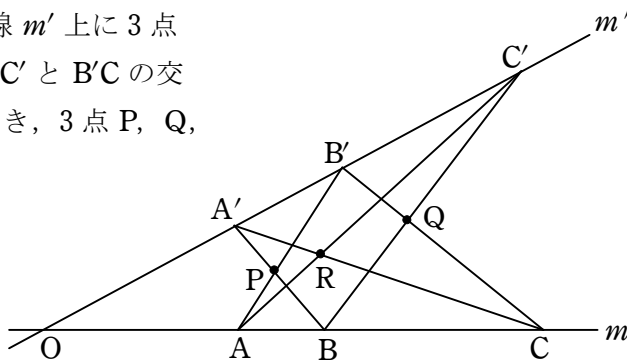


パップスの六角形定理

図のように直線 m 上に 3 点 A, B, C を, 直線 m' 上に 3 点 A', B', C' をとり, AB' と $A'B$ の交点を P , BC' と $B'C$ の交点を Q , CA' と $C'A$ の交点を R とする。このとき, 3 点 P, Q, R は同一直線上にある。



証明

(i) 直線 m と m' が交わる時
 m, m' の交点を O とし, m, m' に平行な
 単位ベクトルをそれぞれ \vec{e}, \vec{e}' , また

$$\vec{OA} = a\vec{e}, \vec{OB} = b\vec{e}, \vec{OC} = c\vec{e}, \vec{OA'} = a'\vec{e}', \vec{OB'} = b'\vec{e}', \vec{OC'} = c'\vec{e}'$$

とする。 AB' と $A'B$ の交点を P について

$$\vec{OP} = (1-s)\vec{OA} + s\vec{OB'} = (1-t)\vec{OA'} + t\vec{OB}$$

とおいて, s, t を求めることにより

$$\vec{OP} = \frac{ab(a'-b')}{aa'-bb'}\vec{e} + \frac{(a-b)a'b'}{aa'-bb'}\vec{e}' \quad \text{から}$$

$$(aa'-bb')\vec{OP} = ab(a'-b')\vec{e} + (a-b)a'b'\vec{e}' \quad \dots\dots ①$$

となる。 \vec{OQ}, \vec{OR} についても同様にして, a, b, c をサイクリックに置き換えた式

$$(bb'-cc')\vec{OQ} = bc(b'-c')\vec{e} + (b-c)b'c'\vec{e}' \quad \dots\dots ②$$

$$(cc'-aa')\vec{OR} = ca(c'-a')\vec{e} + (c-a)c'a'\vec{e}' \quad \dots\dots ③$$

が得られる。ここで, ①× cc' , ②× aa' , ③× bb' をつくり辺々たしあわせると, 右辺は $\vec{0}$ となる。すなわち

$$x = (aa' - bb')cc', \quad y = (bb' - cc')aa', \quad z = (cc' - aa')bb'$$

とおくと,

$$x\vec{OP} + y\vec{OQ} + z\vec{OR} = \vec{0}, \quad x + y + z = 0$$

したがって, 3 点 P, Q, R は同一直線上にある。

(ii) 直線 m と m' が平行のとき

m, m' 上に点 O, O' をとり $\vec{OO'} = \vec{d}$, また
 m, m' に平行な単位ベクトルを \vec{e} ,

$$\vec{OA} = a\vec{e}, \dots\dots, \vec{OA'} = \vec{d} + a'\vec{e}, \dots\dots$$

のようにおくと, (i) と同様にして

$$(a + a' - b - b')\vec{OP} = (a - b)\vec{d} + (aa' - bb')\vec{e}, \quad (\text{以下サイクリック})$$

が得られる。これらから

$$(a + a' - b - b')\vec{OP} + (b + b' - c - c')\vec{OQ} + (c + c' - a - a')\vec{OR} = \vec{0}$$

したがって, 3 点 P, Q, R は同一直線上にある。

(証明終)

