

パップスの六角形定理

図のように直線 ℓ 上に 3 点 A, E, C を, 直線 m 上に 3 点 D, B, F をとり, AB と DE の交点を P , CD と FA の交点を Q , EF と BC の交点を R とする。このとき, 3 点 P, Q, R は同一直線上にある。

証明

(i) 直線 EF と AB が交わるとき

EF と AB の交点を L , AB と CD の交点を M , CD と EF の交点を N とする。

$\triangle LMN$ に対してメネラウスの定理を用いる。

直線 DPE について

$$\frac{LP}{PM} \cdot \frac{MD}{DN} \cdot \frac{NE}{EL} = 1 \quad \dots\dots ①$$

直線 FQA について

$$\frac{LA}{AM} \cdot \frac{MQ}{QN} \cdot \frac{NF}{FL} = 1 \quad \dots\dots ②$$

直線 BRC について

$$\frac{LB}{BM} \cdot \frac{MC}{CN} \cdot \frac{NR}{RL} = 1 \quad \dots\dots ③$$

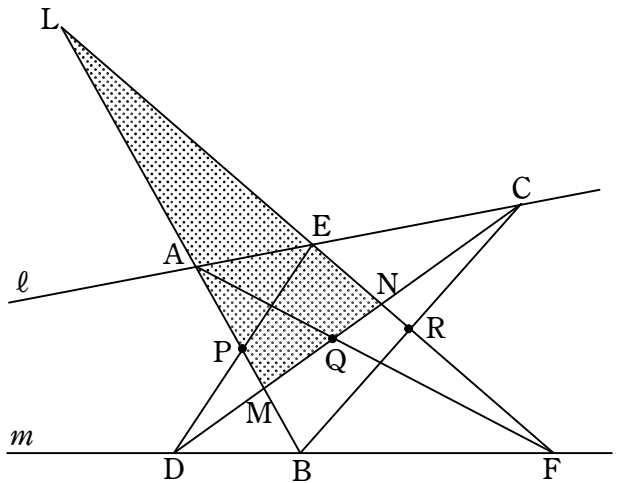
また, 直線 ℓ, m について

$$\frac{LA}{AM} \cdot \frac{MC}{CN} \cdot \frac{NE}{EL} = 1 \quad \dots\dots ④ \quad \frac{LB}{BM} \cdot \frac{MD}{DN} \cdot \frac{NF}{FL} = 1 \quad \dots\dots ⑤$$

①, ②, ③ を辺々かけあわせて ④, ⑤ を用いると

$$\frac{LP}{PM} \cdot \frac{MQ}{QN} \cdot \frac{NR}{RL} = 1$$

したがって, メネラウスの定理の逆により 3 点 P, Q, R は同一直線上にある。



(ii) 直線 EF と AB が平行のとき

$\triangle DBM \sim \triangle DFN$, $\triangle DMP \sim \triangle DNE$ から

$$\frac{MB}{NF} = \frac{MP}{NE} \quad \dots\dots ⑥$$

$\triangle CAM \sim \triangle CEN$, $\triangle CMB \sim \triangle CNR$ から

$$\frac{MA}{NE} = \frac{MB}{NR} \quad \dots\dots ⑦$$

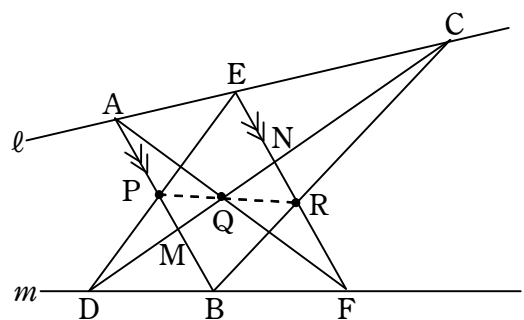
⑥, ⑦ を辺々かけあわせると $\frac{MA}{NF} = \frac{MP}{NR}$

$\triangle QAM \sim \triangle QFN$ から $\frac{MA}{NF} = \frac{QM}{QN}$ よって $\frac{QM}{QN} = \frac{MP}{NR}$ $\dots\dots ⑧$

⑧ と $\angle QMP = \angle QNR$ から $\triangle QMP \sim \triangle QNR$ よって $\angle PQM = \angle RQN$

すなわち, 3 点 P, Q, R は同一直線上にある。

(証明終)



補足 1

直線 AB と DE の交点ができない, すなわち $AB \parallel DE$ のとき $QR \parallel AB$ となる。

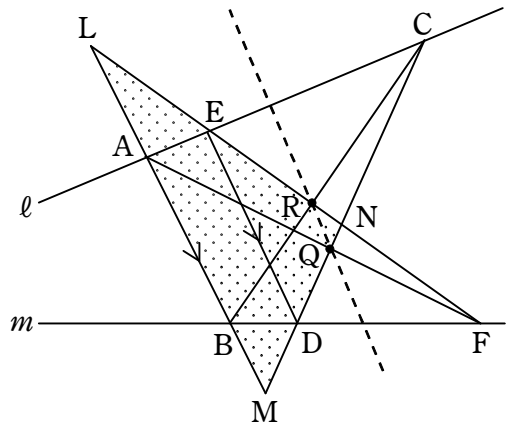
$AB \parallel ED$ ならば $MD : DN = EL : NE$ すなわち

$$\frac{MD}{DN} \cdot \frac{NE}{EL} = 1 \quad \dots\dots ①'$$

これは ① において $\frac{LP}{PM} = 1$ とすることに対応する。

①', ②, ③ を辺々かけあわせて ④, ⑤ を用いると

$$\frac{MQ}{QN} \cdot \frac{NR}{RL} = 1 \quad \text{すなわち} \quad NQ : QM = NR : RL \quad \text{したがって} \quad RQ \parallel LM \quad \text{となる。}$$



補足 2

$AB \parallel DE$ かつ $CD \parallel FA$ のとき $EF \parallel BC$ となる。

$$AB \parallel ED \quad \text{ならば} \quad \frac{MD}{DN} \cdot \frac{NE}{EL} = 1 \quad \dots\dots ①'$$

$$CD \parallel FA \quad \text{ならば} \quad \frac{LA}{AM} \cdot \frac{NF}{FL} = 1 \quad \dots\dots ②'$$

④, ⑤ を辺々かけあわせると

$$\frac{LA}{AM} \cdot \frac{MC}{CN} \cdot \frac{NE}{EL} \times \frac{LB}{BM} \cdot \frac{MD}{DN} \cdot \frac{NF}{FL} = 1$$

これに ①', ②' を用いると

$$\frac{MC}{CN} \cdot \frac{LB}{BM} = 1 \quad \text{すなわち} \quad MC : CN = MB : BL \quad \text{よって} \quad LN \parallel BC$$

