

**補助定理 1** 2つの三角形  $\triangle ABC$  と  $\triangle A'B'C'$  の対応する3辺がそれぞれ平行ならば、3直線  $AA'$ 、 $BB'$ 、 $CC'$  は一点で交わる。

**証明** 仮定は

$$AB \parallel A'B' \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$BC \parallel B'C' \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$AC \parallel A'C' \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

である。直線  $AA'$  と  $BB'$  の交点を  $O$  とし、直線  $OC$  と辺  $B'C'$  との交点を  $C''$  とする。①、②より

$$OA : OA' = OB : OB'$$

$$OB : OB' = OC : OC''$$

であるから  $OA : OA' = OC : OC''$  よって

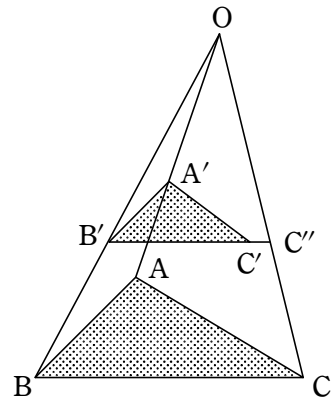
$$AC \parallel A'C''$$

これと③より  $A'C' \parallel A'C''$  すなわち、 $C''$  は直線  $A'C'$  上にある。

また、 $C''$  は辺  $B'C'$  上にもあることから、 $C''$  は  $C'$  に一致する。

すなわち、直線  $CC'$  も  $O$  を通る。

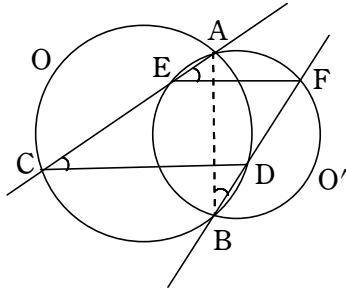
(証明終)



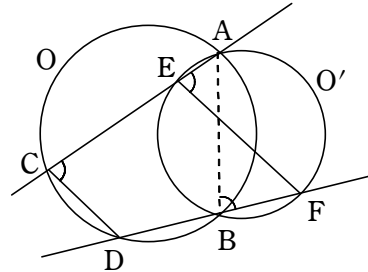
(次ページに続く)

**補助定理2** 2つの円  $O, O'$  が2点  $A, B$  で交わっている。点  $A$  を通る直線と円  $O, O'$  との交点をそれぞれ  $C, E$ 、点  $B$  を通る直線と円  $O, O'$  との交点をそれぞれ  $D, F$  とするとき、 $CD \parallel EF$  である。

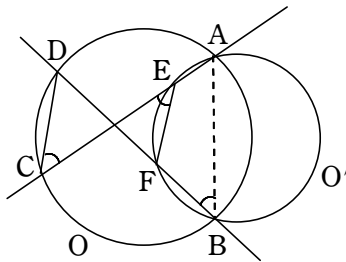
証明



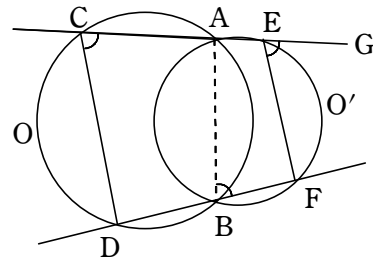
円  $O$  の弧  $AD$  に対する円周角だから  
 $\angle ACD = \angle ABD$   
 円  $O'$  の弧  $AF$  に対する円周角だから  
 $\angle AEF = \angle ABF (= \angle ABD)$   
 よって  $\angle ACD = \angle AEF$   
 同位角が等しいから  $CD \parallel EF$



四角形  $ACDB$  は円  $O$  に内接するから  
 $\angle ACD = \angle ABF$   
 円  $O'$  の弧  $AF$  に対する円周角だから  
 $\angle AEF = \angle ABF$   
 よって  $\angle ACD = \angle AEF$   
 同位角が等しいから  $CD \parallel EF$



円  $O$  の弧  $AD$  に対する円周角だから  
 $\angle ACD = \angle ABD$   
 四角形  $AEFB$  は円  $O'$  に内接するから  
 $\angle CEF = \angle ABF (= \angle ABD)$   
 よって  $\angle ACD = \angle CEF$   
 錯角が等しいから  $CD \parallel EF$



四角形  $ACDB$  は円  $O$  に内接するから  
 $\angle ACD = \angle ABF$   
 四角形  $ABFE$  は円  $O'$  に内接するから  
 $\angle ABF = \angle GEF$   
 よって  $\angle ACD = \angle GEF$   
 同位角が等しいから  $CD \parallel EF$

(証明終)

**パスカルの定理** 円Oに内接する六角形ABCDEFにおいて、対辺AB, DEの交点をP, CD, FAの交点をQ, BC, EFの交点をRとすると、3点P, Q, Rは一直線上にある。

**証明**

3点A, D, Qを通る円O'と直線AB, DEの交点をそれぞれK, Lとする。

$\triangle LKQ$ と $\triangle EBR$ について、対応する3辺がそれぞれ平行となることが示されれば、補助定理1によって、3直線KB, LE, QRが一点Pで交わる。すなわち、3点P, Q, Rは一直線上にある。

$LK \parallel EB, KQ \parallel BR, LQ \parallel ER$ であることは、下の図1, 2, 3および補助定理2から明らかである。

(証明終)

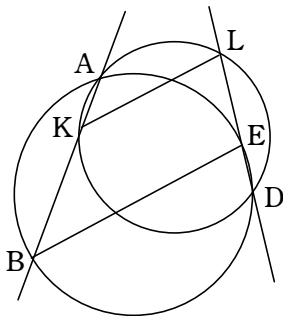
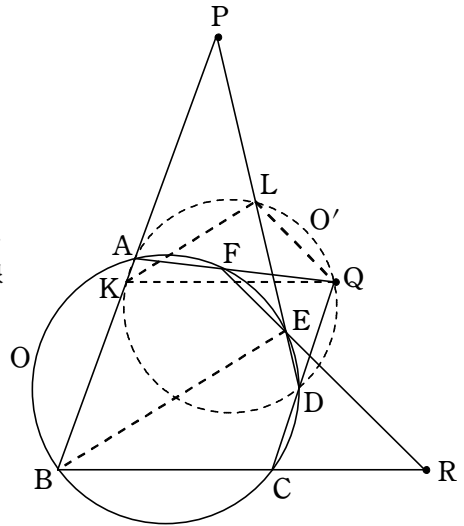


図1

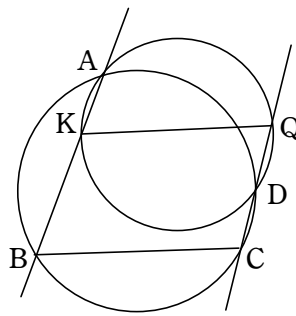


図2

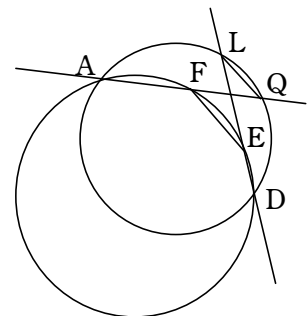


図3

**参考図書** 数学ワンポイント双書34『射影幾何』津田丈夫著 共立出版(1981)