

パスカルの定理

円に内接する六角形 ABCDEF において、対辺 AB, DE の交点を P, 対辺 CD, FA の交点を Q, 対辺 EF, BC の交点を R とするとき、3 点 P, Q, R は一直線上にある。

証明

EF と AB の交点を L, AB と CD の交点を M, CD と EF の交点を N とする。
△LMN に対してメネラウスの定理を用いる。

直線 PED について

$$\frac{LP}{PM} \cdot \frac{MD}{DN} \cdot \frac{NE}{EL} = 1 \quad \dots\dots ①$$

直線 AFQ について

$$\frac{LA}{AM} \cdot \frac{MQ}{QN} \cdot \frac{NF}{FL} = 1 \quad \dots\dots ②$$

直線 BCR について

$$\frac{LB}{BM} \cdot \frac{MC}{CN} \cdot \frac{NR}{RL} = 1 \quad \dots\dots ③$$

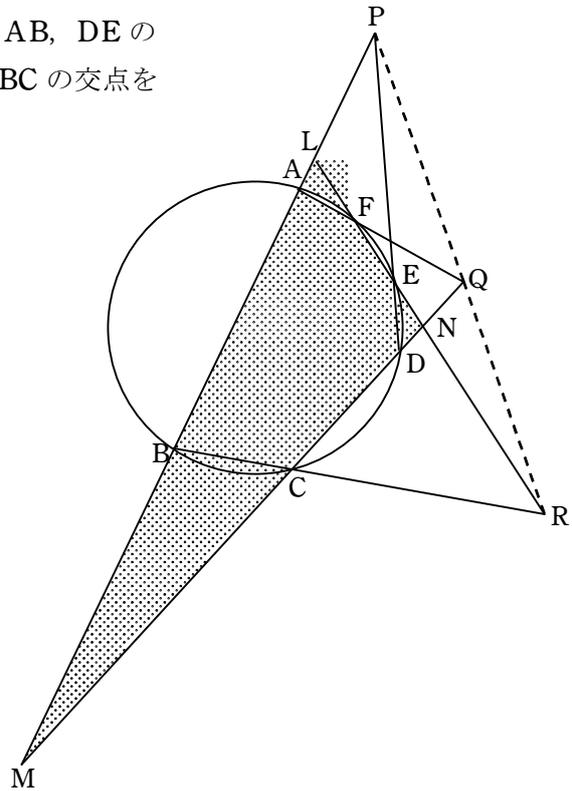
また、方べきの定理により

$$LE \cdot LF = LA \cdot LB, \quad MA \cdot MB = MC \cdot MD, \quad NC \cdot ND = NE \cdot NF \quad \dots\dots ④$$

①, ②, ③ を辺々かけあわせて ④ を用いると

$$\frac{LP}{PM} \cdot \frac{MQ}{QN} \cdot \frac{NR}{RL} = 1 \quad \dots\dots ⑤$$

したがって、メネラウスの定理の逆により 3 点 P, Q, R は同一直線上にある。 (証明終)



補足

対辺 AB, DE が平行で交点 P が存在しないとき、① の代わりに

$$\frac{MD}{DN} \cdot \frac{NE}{EL} = 1 \quad \dots\dots ①'$$

が成り立つ。①', ②, ③ を辺々かけあわせて ④ を用いると

$$\frac{MQ}{QN} \cdot \frac{NR}{RL} = 1 \quad \dots\dots ⑤'$$

となる。これは QR と LM (AB) が平行となることを表している。