

パスカルの定理 (五角形)

円に内接する五角形 ABCDE において、辺 AB, DE の交点を P, 辺 CD と A における接線との交点を Q, 辺 EA, BC の交点を R とするとき、3 点 P, Q, R は一直線上にある。

証明

A における接線と BC, DE の交点をそれぞれ L, M, BC と DE の交点を N とする。  
 △LMN に対してメネラウスの定理を用いる。

直線 PAB について

$$\frac{LA}{AM} \cdot \frac{MP}{PN} \cdot \frac{NB}{BL} = 1 \quad \dots\dots ①$$

直線 QDC について

$$\frac{LQ}{QM} \cdot \frac{MD}{DN} \cdot \frac{NC}{CL} = 1 \quad \dots\dots ②$$

直線 AER について

$$\frac{LA}{AM} \cdot \frac{ME}{EN} \cdot \frac{NR}{RL} = 1 \quad \dots\dots ③$$

また、方べきの定理により

$$LA^2 = LB \cdot LC, MA^2 = MD \cdot ME, NB \cdot NC = ND \cdot NE \quad \dots\dots ④$$

①, ②, ③ を辺々かけあわせ ④ を用いると

$$\frac{LQ}{QM} \cdot \frac{MP}{PN} \cdot \frac{NR}{RL} = 1$$

したがって、メネラウスの定理の逆により 3 点 P, Q, R は一直線上にある。 (証明終)

