

パスカルの定理 ( 三角形 )

円  $D$  に内接する  $\triangle ABC$  において、図1のように、頂点  $A, B, C$  における接線と直線  $BC, CA, AB$  との交点を  $P, Q, R$  とするとき、3点  $P, Q, R$  は一直線上にある。

図1

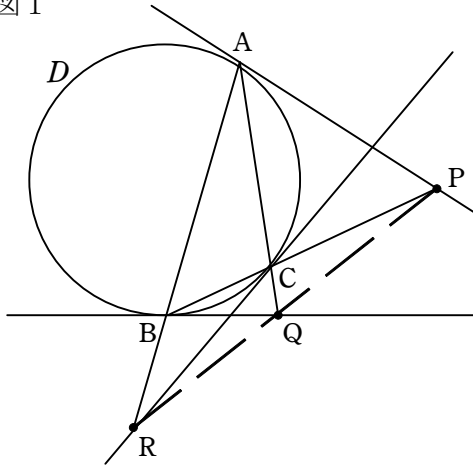
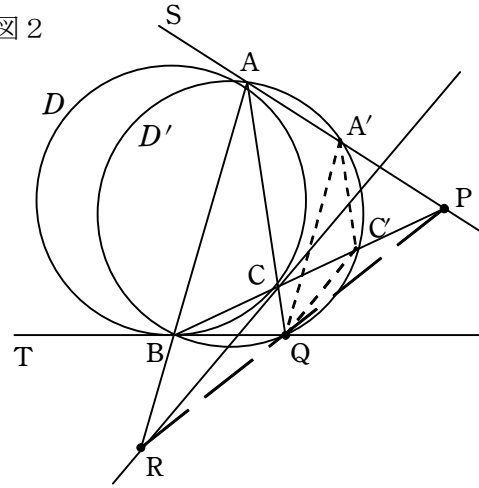


図2



証明1 ( 図2 )

3点  $A, B, Q$  を通る円を  $D'$  とし、 $D'$  と直線  $PA, PC$  との交点を  $A', C'$  とする。  
 $\triangle ARC$  と  $\triangle A'QC'$  において  $AR \parallel A'Q, RC \parallel QC', AC \parallel A'C'$  ならば、直線  $AA', RQ, CC'$  が1点で交わる、すなわち3点  $P, Q, R$  は一直線上にあるから、上の3組の平行を示せばよい。

$AR \parallel A'Q$  について

円  $D$  における接弦定理から  $\angle SAB = \angle ACB = \angle ABT$   
 四角形  $ABQA'$  は円  $D'$  に内接するから  $\angle ABT = \angle AA'Q$   
 $\angle SAB = \angle AA'Q$  であるから  $AR \parallel A'Q$

$RC \parallel QC'$  について

円  $D$  における接弦定理から  $\angle BCR = \angle BAC = \angle BAQ$   
 円  $D'$  の弧  $BC$  に対する円周角から  $\angle BAQ = \angle BC'Q$   
 $\angle BCR = \angle BC'Q$  であるから  $RC \parallel QC'$

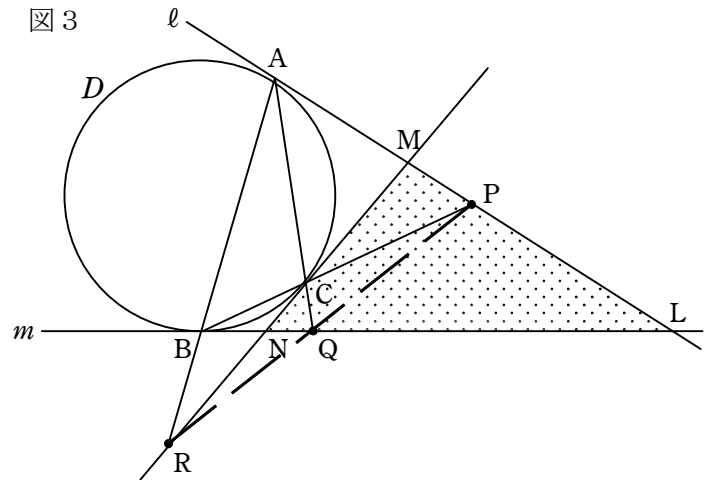
$AC \parallel A'C'$  について

円  $D$  における接弦定理から  $\angle A'AC = \angle ABC = \angle ABC'$   
 四角形  $ABC'A'$  は円  $D'$  に内接するから  $\angle ABC = \angle PA'C'$   
 $\angle A'AC = \angle PA'C'$  であるから  $AC \parallel A'C'$

(証明終)

証明 2 ( 図 3 )

A, B における接線を  $\ell$ ,  $m$  とし,  
 $\ell$ ,  $m$  の交点を L, 辺 CD と  $\ell$  の交  
 点を M, 辺 CD と  $m$  の交点を N と  
 する。



$\triangle LMN$  においてメネラウスの定理を用いる。

直線 PCB について  $\frac{LP}{PM} \cdot \frac{MC}{CN} \cdot \frac{NB}{BL} = 1 \dots\dots ①$

直線 ACQ について  $\frac{LA}{AM} \cdot \frac{MC}{CN} \cdot \frac{NQ}{QL} = 1 \dots\dots ②$

直線 ABR について  $\frac{LA}{AM} \cdot \frac{MR}{RN} \cdot \frac{NB}{BL} = 1 \dots\dots ③$

また、接線の長さの関係により

$LA = LB, MA = MC, NB = NC \dots\dots ④$

①, ②, ③ を辺々かけあわせ ④ を用いると

$$\frac{LP}{PM} \cdot \frac{MR}{RN} \cdot \frac{NQ}{QL} = 1$$

したがって、メネラウスの定理の逆により 3 点 P, Q, R は同一直線上にある。 (証明終)