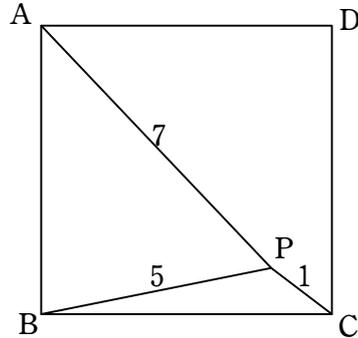


問題 正方形 ABCD とその内部の 1 点 P がある。線分 AP, BP, CP の長さがそれぞれ 7, 5, 1 であるとき、この正方形の面積を求めよ。(図は問題にはない)



略解

右図のように P から AB, BC に垂線 PE, PF をひく。

正方形の辺の長さを  $a$ ,  $BF = x$ ,  $BE = y$  とすると

$$x^2 + y^2 = 5^2 \quad \dots\dots ①$$

$$(a - x)^2 + y^2 = 1^2 \quad \dots\dots ②$$

$$x^2 + (a - y)^2 = 7^2 \quad \dots\dots ③$$

① と ②, ① と ③ から  $x^2 + y^2$  を消去すると

$$a^2 - 2ax + 5^2 = 1^2 \quad \text{から} \quad 2ax = a^2 + 24 \quad \dots\dots ②'$$

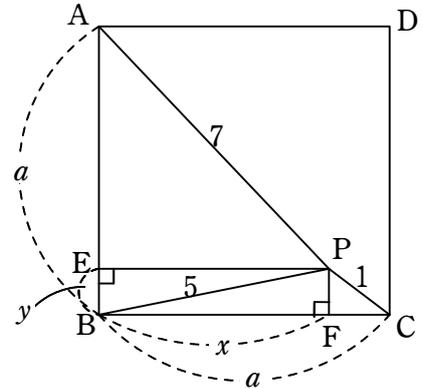
$$a^2 - 2ay + 5^2 = 7^2 \quad \text{から} \quad 2ay = a^2 - 24 \quad \dots\dots ③'$$

①, ②', ③' より  $x, y$  を消去すると

$$(a^2 + 24)^2 + (a^2 - 24)^2 = 100a^2 \quad \text{から} \quad a^4 - 50a^2 + 24^2 = 0$$

$$(a^2 - 25)^2 = 25^2 - 24^2 \quad \text{よって} \quad a^2 = 25 \pm 7$$

③' より  $a^2 - 24 > 0$  であるから正方形の面積は  $a^2 = 32 \quad \dots\dots$ (答)



感想

正方形の辺の長さは  $a = 4\sqrt{2}$  だから  $AC = 8$  となり、P は対角線 AC 上にあることとなります。このことを示せばよいとすると、右図の方法があります。

$\triangle PBC$  と合同な  $\triangle QBA$  をつくと四角形 AQBP において  $\angle QBP = \angle QAP = 90^\circ$  だから

$$\angle APB + \angle AQB = 180^\circ$$

$\angle AQB = \angle CPB$  から

$$\angle APB + \angle CPB = 180^\circ$$

となります。

