

解説

正四面体について

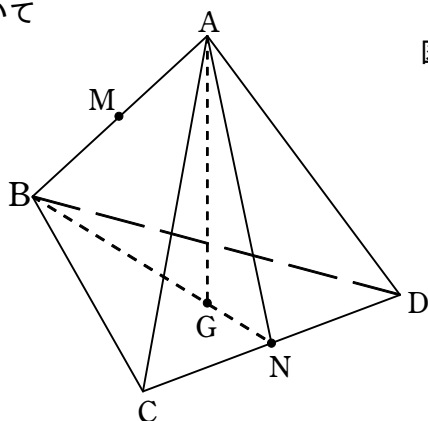


図 1

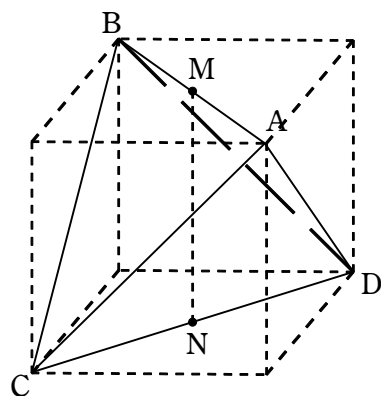


図 2

正四面体 V を $ABCD$ とし, AB , CD の中点を M , N , $\triangle BCD$ の重心を G とする (図 1)。辺の長さが 1 の正三角形の高さだから

$$AN=BN=CM=DM=\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad BG:GN=2:1 \quad \text{から} \quad BG=\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad GN=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

各面の面積は $\frac{\sqrt{3}}{4}$, 対称性から $AG \perp \triangle BCD$, $AG=\sqrt{AN^2-GN^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\triangle ABN=\frac{\sqrt{2}}{4}$

体積は $\frac{1}{3}\triangle BCD \cdot AG=\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{12}$ または $\frac{1}{3}\triangle ABN \cdot CD=\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot 1=\frac{\sqrt{2}}{12}$

正四面体 $ABCD$ は一辺の長さが $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の立方体に埋め込むことができ (図 2) $MN=\frac{1}{\sqrt{2}}$

正射影について

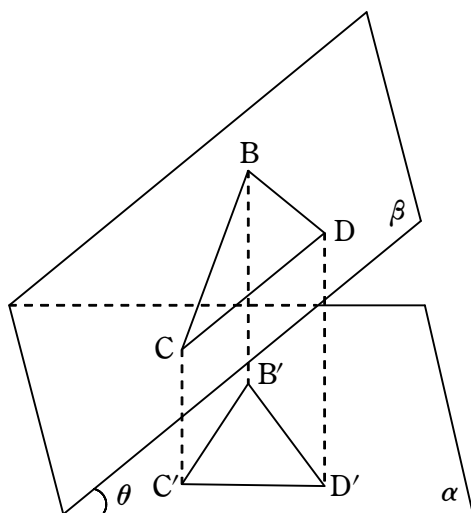


図 3

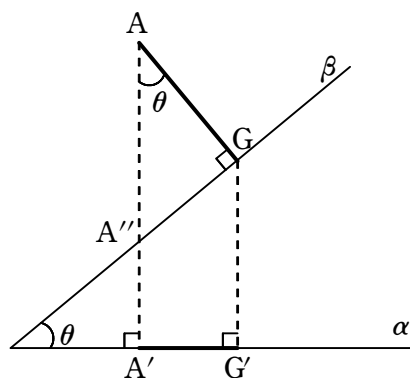


図 4

正四面体 V の頂点 A , B , C , D の α 上への正射影を A' , B' , C' , D' とし, $\triangle BCD$ を含む平面を β とする。また, 直線 AA' と平面 β との交点を A'' とする。 $\overrightarrow{AA''} \perp \alpha$, $\overrightarrow{AG} \perp \beta$ であるから, α と β のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) とすると, $\overrightarrow{AA''}$ と $\overrightarrow{AG}$ のなす角も θ である。

β 上の平面図形の面積を T , その α 上への正射影の面積を T' とすると

$$T'=T \cos \theta \quad \text{たとえば} \quad \triangle B'C'D'=\triangle BCD \cos \theta, \quad \cos \theta=\frac{AG}{AA''}$$

正四面体の正射影の面積について

(i) 正四面体 V の正射影が三角形のとき (図 5)

このとき, A'' は $\triangle BCD$ の周または内部にある。

$$S = \triangle B'C'D' = \triangle BCD \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \theta$$

$$\text{ただし } \cos \theta = \frac{AG}{AA''} = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{AA''}$$

S が最大になるのは $\cos \theta = 1$ のときで $S = \frac{\sqrt{3}}{4}$

(このとき $\theta = 0$ A'' は G に一致)

S が最小になるのは $\cos \theta$ が最小すなわち AA''

が最大になるときで $S = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

(このとき A'' は頂点 B, C, D のいずれかに一致)

(ii) 正四面体 V の正射影が四角形のとき (図 6, 7)

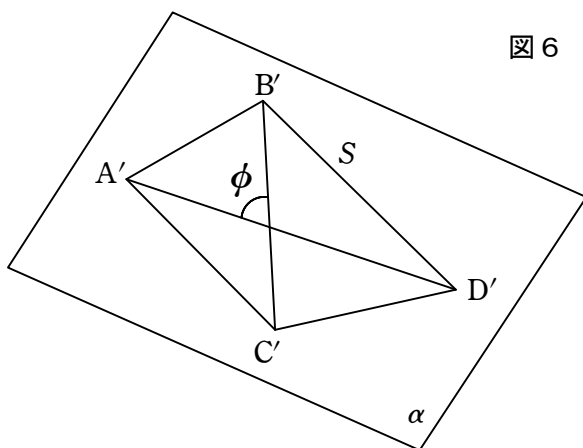


図 6

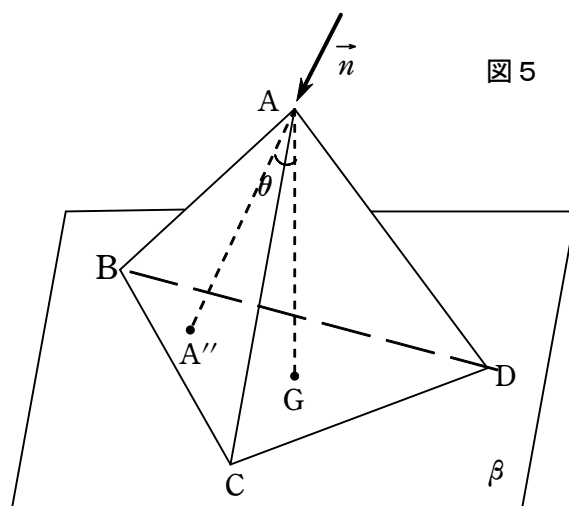


図 5

($\vec{n}$ は α の法線ベクトル $\vec{n} \perp \alpha$)

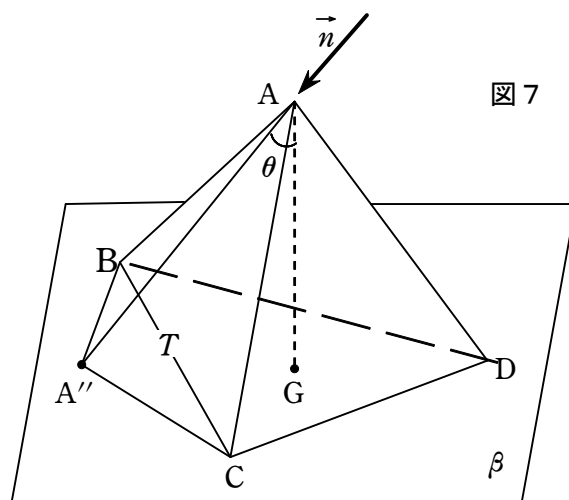


図 7

α 上で正射影は四角形 $A'C'D'B'$ のように $A'D'$ と $B'C'$ が交わっているものとする。

この 2 つの対角線のなす角を ϕ とすると, $S = \frac{1}{2} A'D' \cdot B'C' \sin \phi$

ここで, 図 2 で $MN \perp \alpha$ であるとき, $A'D' = B'C' = 1$, $\phi = \frac{\pi}{2}$ ($\sin \phi = 1$) となってそれぞれ

最大値をとるので, S も最大となり, 最大値は $S = \frac{1}{2}$ である。(このとき $A'C'D'B'$ は正方形)

S の最小値について。 β 上で四角形 $A''CDB$ の面積を T とすると, $S = T \cos \theta$

β 上で A'' が S が減少するように動くと (V が移動すると) 連続的に四角形 $A''CDB$ は三角形に変化する。 A'' が BC に平行に動くと T 一定, $\cos \theta$ 減少, A'' が G 中心の円弧上を動くと T 減少, $\cos \theta$ 一定, いずれにしても四角形での S の最小値は存在しない。

(i), (ii) から S は 最大値 $\frac{1}{2}$ (ねじれの位置にある 2 辺がともに α に平行のとき)

最小値 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (いずれか 1 辺が α に垂直とき) をとる。

感想 正射影が四角形のとき, S の最小値が存在しないことの説明は十分かどうか分かりません。

全体としては β に投影してから α への正射影を考えるのが分かり易いと思われます。