

略解

$\triangle ABE$ と合同な $\triangle EDG$ をつくり、
AD に関して E, G と対称な点を E' ,
 G' とする。 $\angle GDF = \angle ABF = 30^\circ$
だから、 $\triangle DGG'$ は正三角形。
五角形 $AEGG'E'$ は辺の長さ
がすべて等しい。しかし内角
はすべて等しいとはいえない
ので正五角形であることは自明
ではない。以下で五角形 $AEGG'E'$ が
正五角形であることを示す。

$$\angle EAA' = 120^\circ - \bullet\bullet$$

$$\angle AEG = \angle AE'G' = 90^\circ + \bullet\bullet\bullet$$

$$\angle EHF = \angle EBH + \angle BEH = 30^\circ - \bullet + 90^\circ - \bullet \text{ から}$$

$$\angle EGG' = \angle E'G'G = 120^\circ - \bullet\bullet$$

ここで図2のように

$$\angle A = \angle G = \angle G' = \circ\circ, \quad \angle E = \angle E' = \nabla\nabla$$

とすると

$$\circ\circ\circ\circ\circ\circ + \nabla\nabla\nabla\nabla = 540^\circ \text{ から}$$

$$\circ\circ\circ + \nabla\nabla = 270^\circ \dots \textcircled{1}$$

図3の $\triangle AGG'$ について、 $\triangle EAG$ と $\triangle E'AG'$ は
合同だから $AG = AG'$ であり

$$\angle EAG = \angle EGA = \angle E'AG' = \angle E'G'A$$

$$= (180^\circ - \nabla\nabla) \div 2 = 90^\circ - \nabla \text{ から}$$

$$\angle GAG' = \circ\circ - (90^\circ - \nabla) \times 2 = \circ\circ + \nabla\nabla - 180^\circ \dots \textcircled{2}$$

$\triangle EG'E'$ についても $EG' = EE'$ であり

$$\angle GEG' = \angle GG'E = \angle AEE' = \angle AE'E$$

$$= (180^\circ - \circ\circ) \div 2 = 90^\circ - \circ \text{ から}$$

$$\angle G'EE' = \nabla\nabla - (90^\circ - \circ) \times 2 = \circ\circ + \nabla\nabla - 180^\circ \dots \textcircled{3}$$

②, ③ から $\angle GAG' = \angle G'EE'$ (① から $= 90^\circ - \circ$)

$\triangle AGG'$ と $\triangle EG'E'$ は頂角と底辺の等しい二等辺三角形だから

合同である。よって $AG = EG'$ から $\angle AEG = \angle EGG'$, すなわち

五角形 $AEGG'E'$ はすべての内角が等しく正五角形である。したがって

$$\angle EAA' = 120^\circ - \bullet\bullet = 108^\circ \text{ から } \bullet = x = 6^\circ \dots \text{(答)}$$

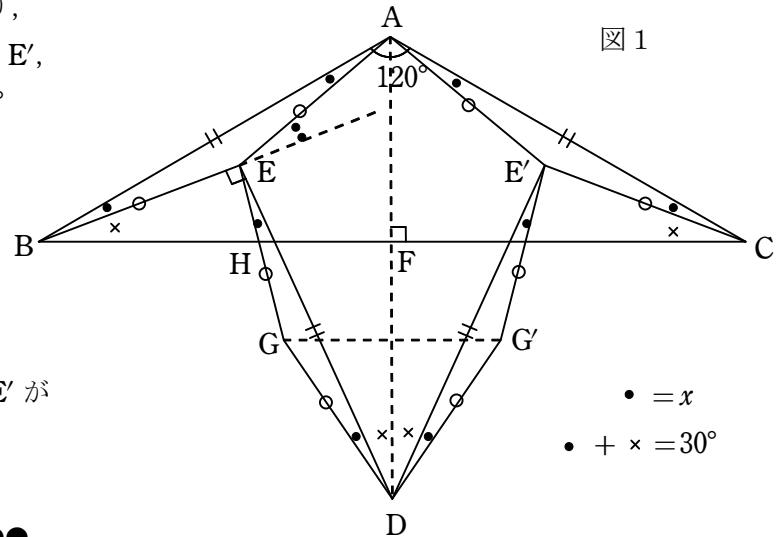


図1

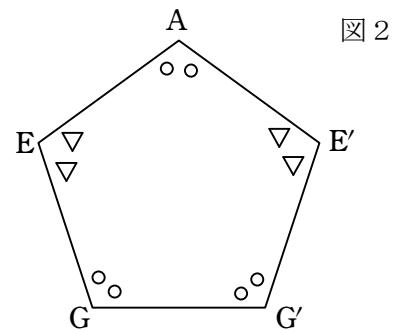


図2

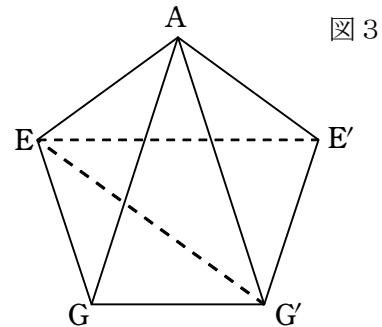


図3

感想

角度問題は、作図ソフトなどで答にアタリをつけてから補助線をひかないと厳しいですね。

$$x = 6^\circ \rightarrow \angle EAF = 54^\circ \rightarrow 108^\circ \rightarrow \text{正五角形}$$

などの連想です。解説の後半は YouTube のコメントをヒントに考えました。