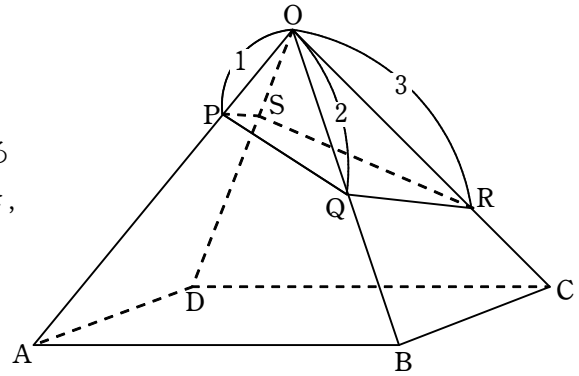


(2015年 筑波大附属駒場高)

**問題** 図の  $O-ABCD$  はすべての辺の長さが4である正四角すいです。これを平面  $PQRS$  で切ったとき、四角すい  $O-PQRS$  の体積を求めなさい。



**略解** (図1) 正方形  $ABCD$  の対角線の交点を  $H$ ,  $OH$  と平面  $PQRS$  との交点を  $I$  とする。  
 $AC=BD=2\sqrt{2}$ ,  $\angle AOC=\angle BOD=90^\circ$  から

$$OH=AH=BH=CH=DH=2\sqrt{2}$$

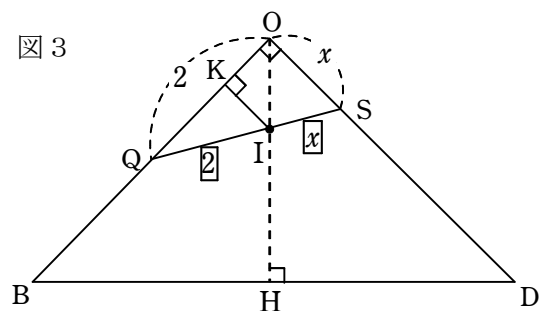
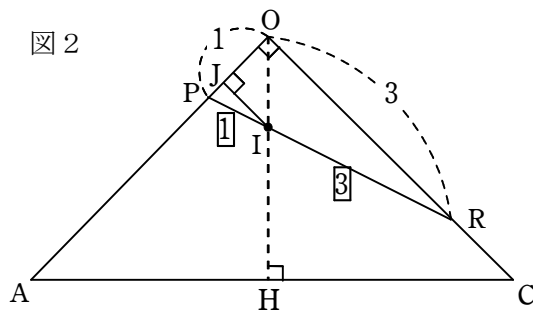
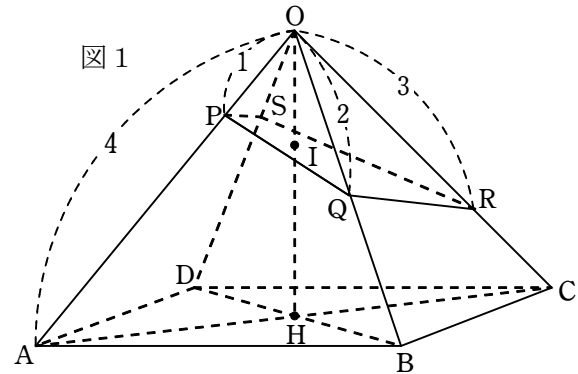
(図2,3)  $I$  から辺  $OA$ ,  $OB$  へ垂線をひき、交点を  $J$ ,  $K$  とする。

$OI$  は  $\angle POR$  の2等分線だから

$$PI:IR=OP:OR=1:3$$

$JI \parallel OR$  だから  $PJ:JO=PI:IR=1:3$

$$\text{これから } OJ=OP \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$



$OS=x$  とすると  $QK:KO=QI:IS=OQ:OS=2:x$  から  $OK=OQ \times \frac{x}{x+2} = \frac{2x}{x+2}$

$$OK=OJ \text{ から } \frac{2x}{x+2} = \frac{3}{4} \text{ これを解いて } x = \frac{6}{5}$$

四角すい  $O-PQRS$  を,  $\triangle OPR$  を底面とする2つの三角すい  $Q-OPR$ ,  $S-OPR$  に分ける。

それぞれの高さは  $Q, S$  から  $OH$  にひいた垂線の長さだから  $\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{6}{5\sqrt{2}}$ , 求める体積は

$$\frac{1}{3} \times \triangle OPR \times \left( \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{6}{5\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{16}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{5} \dots\dots(\text{答})$$

**感想** YouTube にあった問題を参照したので, 元の問題文は不明です。いろいろな公式があるようですが, 2つの三角すいに分けるのが簡明だと思いました。