

第四問 (2015年 宮城県前期)

略解

$\triangle ABC \cong \triangle ADE$ から

$$\angle ABC = \angle ADE, \quad \angle ACB = \angle AED,$$

$$AC = AE = 4, \quad BC = DE = 9$$

$AE \parallel BC$ から

$$\angle ACB = \angle EAC, \quad \angle AED = \angle EGC$$

1

$\triangle ABC$ と $\triangle FBA$ において

$$\angle ABC = \angle FBA \quad (\text{共通})$$

$$\angle ACB = \angle EAC \quad (\text{平行線の錯角})$$

$$= \angle FAB \quad (\text{回転の角})$$

対応する2角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABC \sim \triangle FBA \quad (\text{ウ})$$

2

$\angle HGC = \angle HCG$ だから $\triangle HGC$ は $HG = HC$ である二等辺三角形。

3

$HG = HC, HE = HA$ から $EG = AC = 4$ よって $DG = DE - EG = 9 - 4 = 5$ (cm)

4

$\triangle ABC \sim \triangle FBA$ から $BA : BF = BC : BA = 9 : 7, \quad BF = BA \times \frac{7}{9} = \frac{49}{9}$

$\triangle DAE$ において $FG \parallel AE$ だから $FG : AE = DG : DE = 5 : 9, \quad FG = AE \times \frac{5}{9} = \frac{20}{9}$

$$GC = BC - BF - FG = 9 - \frac{49}{9} - \frac{20}{9} = \frac{4}{3}$$

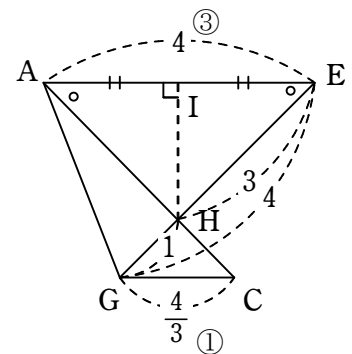
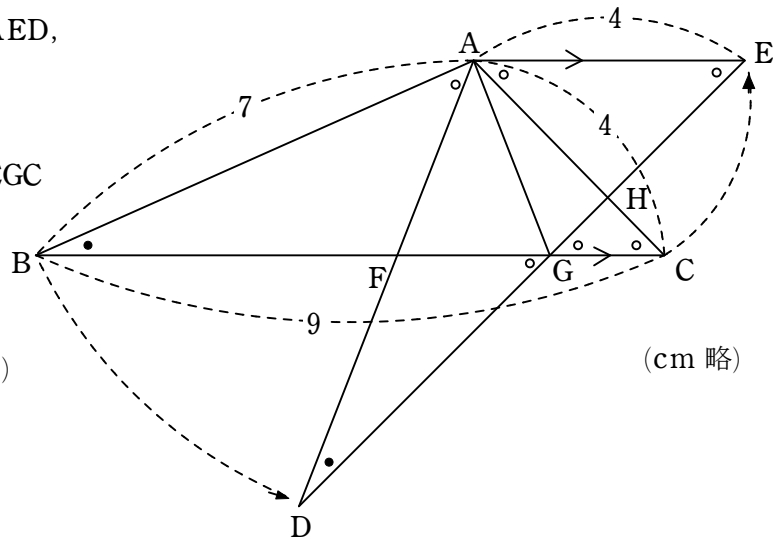
$\triangle HGC \sim \triangle HEA$ から $HG : HE = GC : EA = \frac{4}{3} : 4 = 1 : 3$

$GE = 4$ から $HG = 1, HE = 3$

H から AE に垂線をひき交点を I とすると, $AI = EI = 2$

$$HI = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}, \quad \triangle HEA = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

$\triangle HAG : \triangle HEA = HG : HE = 1 : 3$ から $\triangle HAG = \triangle HEA \times \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$ (cm²)



感想 最後の4番を求めるだけならば, $\triangle HEI$ に焦点をあわせるのが早い。

$\triangle ABC$ で垂線 AJ をひくと $\triangle ACJ \sim \triangle HEI$ であり

$$y^2 = 7^2 - (9-x)^2 = 4^2 - x^2$$

を解き $x = \frac{8}{3}, y = \frac{4\sqrt{5}}{3}$ から

$AC : CJ : AJ = 4 : \frac{8}{3} : \frac{4\sqrt{5}}{3} = 3 : 2 : \sqrt{5}$ が分かる。

