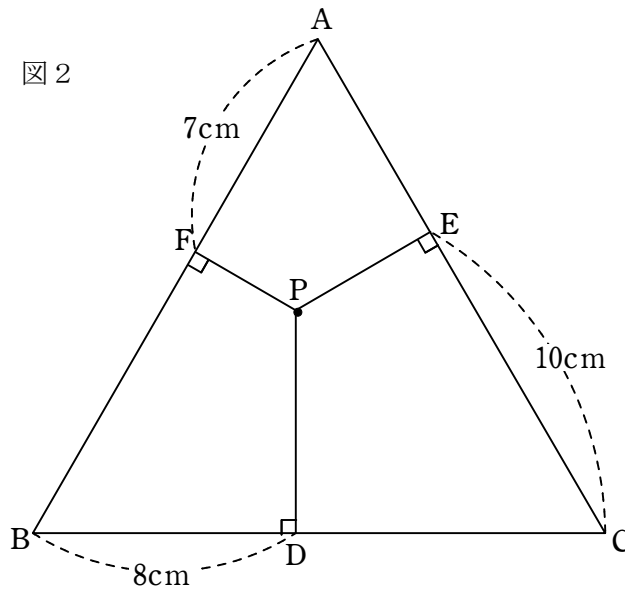


問題3 三角形ABCの内側に点Pがあり、Pから辺BC、AC、ABにそれぞれ垂直な線を引き、交わった点を順にD、E、Fとします。次の問いに答えなさい。

(2) 図2のように、三角形ABCは正三角形であり、AFの長さは7cm、BDの長さは8cm、CEの長さは10cmです。このとき、正三角形の一辺の長さを求めなさい。



略解 正三角形の各辺に平行でPを通る直線

LI, HK, JGを引く。GD, IE, KFの長さを○, △, □で表すと図3のようになる。一辺の長さは

$$BC = BG + GH + HC = \square\square + \circ\circ + \triangle\triangle \dots\dots(*)$$

AF, BD, CEの長さについて

$$\triangle\triangle + \square = 7$$

$$\square\square + \circ = 8$$

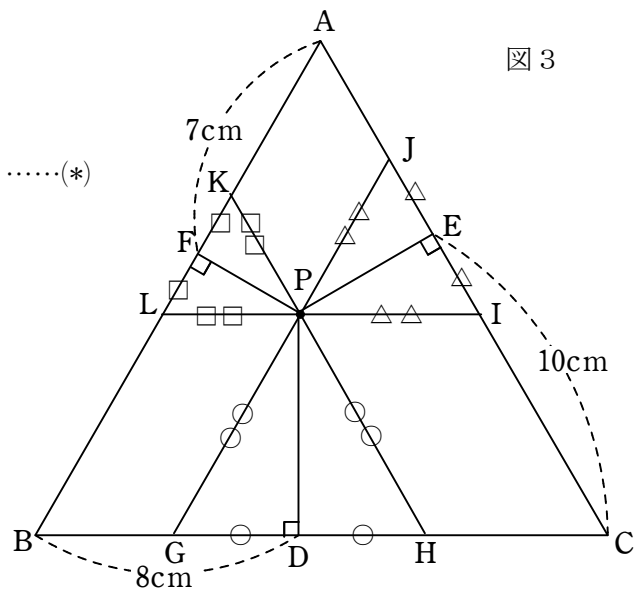
$$\circ\circ + \triangle = 10$$

これらを縦にたすと

$$\square\square\square + \circ\circ\circ + \triangle\triangle\triangle = 25$$

これから  $\square + \circ + \triangle = \frac{25}{3}$

一辺の長さは  $\square\square + \circ\circ + \triangle\triangle = \frac{50}{3}$  (cm)



感想 この略解はある塾の解答を参照したものです。参照したものの中では一番簡明だと思いました。○, △, □ という記号を使っていますが、実質  $a, b$  などの文字を使ったことと同じで、これくらいはおそらく許されるのでしょう。

図3からはいろいろなことが分かります。FB, DC, EA の長さについて

$$FB = \square + \circ\circ, DC = \circ + \triangle\triangle, EA = \triangle + \square\square$$

ですから  $FB + DC + EA = \square\square\square + \circ\circ\circ + \triangle\triangle\triangle$  となり、これは  $AF + BD + CE$  に等しい。正三角形の1辺の長さを  $a$  とすると、周の長さは  $3a$  ですから、結局

$$AF + BD + CE = FB + DC + EA = \frac{3a}{2}$$

が成り立ちます。対称性から納得できる結果です。

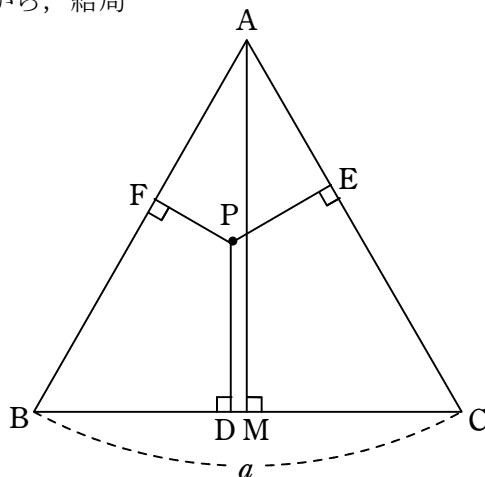
また、正三角形の辺と高さの比は  $2:\sqrt{3}$  で一定ですから

(\*) の式は

$$PD + PE + PF = AM$$

と同じです。(ヴィヴィアーニの定理)

これらの等式は P の位置によらず成り立つのが面白いですね。



この問題を考える途中で次のことに気がきました。

右図のように三角形 ABC の内部の点 P から各辺に垂線をひき、その足 D, E, F が各辺上にあるとき、

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2$$

が成り立ちます。これはピタゴラスの定理を用いて証明できます。

特に正三角形の場合、1辺の長さを  $a$  として

$$a_2 = a - a_1, b_2 = a - b_1, c_2 = a - c_1 \text{ とおくと}$$

$$a_1 + b_1 + c_1 = \frac{3a}{2}$$

が得られます。こういうことを考えさせるのも、問題として名作なんでしょうね。

