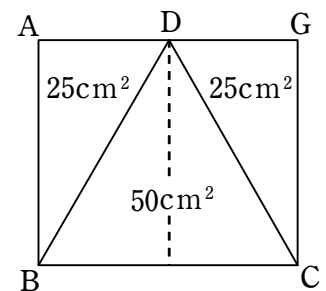
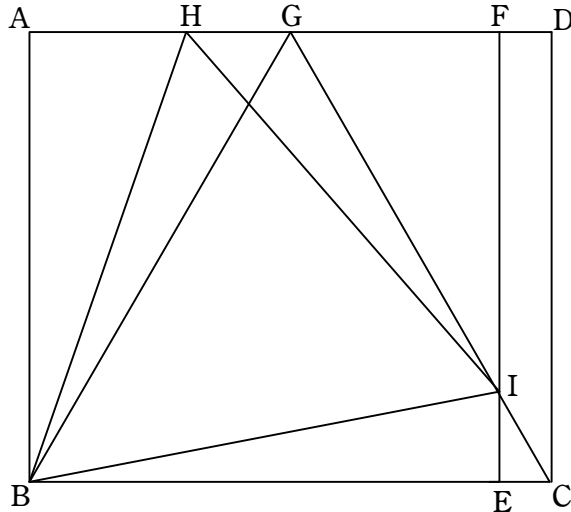


問題8 四角形 ABCD と四角形 ABEF は長方形で、三角形 BCG と三角形 BIH は正三角形です。
 四角形 ABCD の面積は 100 cm^2 で、三角形 ECI の面積は 1 cm^2 です。

- (1) 三角形 ABH と三角形 BEI の面積の和は何 cm^2 ですか。
 (2) 三角形 BCG と三角形 BIH の面積の差は何 cm^2 ですか。



解説

- (1) $\triangle BGH \equiv \triangle BCI$ だから
 $\triangle ABH + \triangle BEI = \triangle ABH + \triangle BCI - \triangle ECI$
 $= \triangle ABH + \triangle BGH - \triangle ECI$
 $= \triangle ABG - \triangle ECI = 25 - 1 = 24 (\text{ cm}^2)$

- (2) $\triangle CDG \sim \triangle IEC$ で面積比が $25 : 1$ だから相似比は
 $DG : EC = CD : IE = 5 : 1$

また $EC : IC : HG = 1 : 2 : 2$

$\triangle BCG = 50$ だから $\triangle BIH$ の面積を求めればよい。

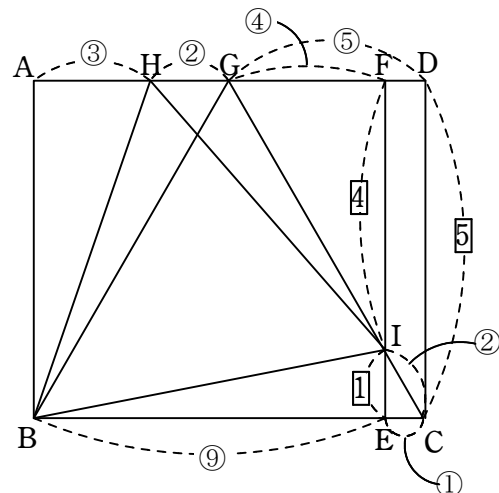
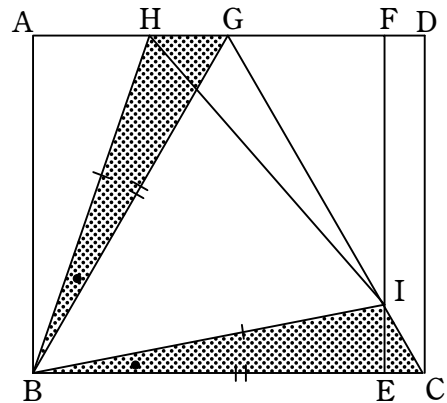
$\triangle BIH = \text{長方形} ABEF - \triangle ABH - \triangle BEI - \triangle HIF$

ここで $\triangle HIF = \frac{1}{2} \times 90 \times \frac{6}{9} \times \frac{4}{5} = 24$

よって

$\triangle BIH = 90 - 24 - 24 = 42$

$\triangle BCG - \triangle BIH = 50 - 42 = 8 (\text{ cm}^2)$

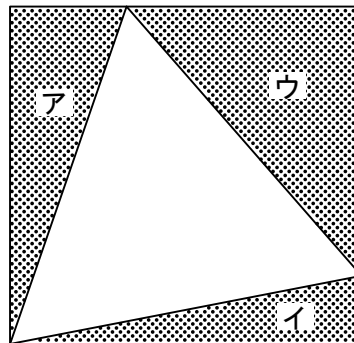


感想

実は、右図のように長方形が正三角形に外接しているとき、3つの三角形の面積の間には

$$\text{ア} + \text{イ} = \text{ウ}$$

という関係があります。出題者はおそらくこれを意識していたのではないのでしょうか。証明は三角関数を使うのが簡単だと思っていたのですが、問題の図を使うこともできるんですね。勉強になりました。



ポイントは $\triangle BGH \equiv \triangle BCI$ でした。

$AG = b$, $EC = c$ とすると、右図のようになり

$$\begin{aligned} \triangle ABH + \triangle BEI &= \triangle ABG - \triangle ECI \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}b^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}c^2 \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} \triangle HIF &= \frac{\sqrt{3}}{2}(b-c)(b+c) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}(b^2 - c^2) \end{aligned}$$

したがって

$$\triangle ABH + \triangle BEI = \triangle HIF$$

