

大学入試問題を解くのに、標準的な方法ではなく、何かうまい(あるいはズルい)方法が考えられる場合がある。制限時間の下では実用的ではないかも知れないし、数学的に厳密でないこともあるが、様々な方法をあれこれ試して解いてみるのも、楽しいことではないだろうか。

2022年 関西学院大学 全学部日程 理系

1 ベクトル \vec{a} , \vec{b} が, $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{17}$, $|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{26}$, $|\vec{a}|=\sqrt{10}$ を満たすとき, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\square$, $|\vec{b}|=\square$ である. t が実数全体を動くとき, $|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ を t を用いて表すと \square となるから, $|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値に最も近い整数は \square である.

17, 26, 10 という数から思いつくのは, いずれも平方数の和ということである。

$$17=4^2+1^2, 26=5^2+1^2, 10=3^2+1^2$$

これから $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-2\vec{b}$, \vec{a} は(よって \vec{b} も) 格子点を結ぶベクトルではないかと推察できる。そこで成分で $\vec{a}+\vec{b}=(4, 1)$ としてみると

$$\vec{a}-2\vec{b}=(\pm 5, \pm 1), (\pm 1, \pm 5)$$

の可能性があるが $(\vec{a}+\vec{b})-(\vec{a}-2\vec{b})=3\vec{b}$ から成分が3の倍数とすると $\vec{a}-2\vec{b}=(1, -5)$ に限られ, これから $\vec{b}=(1, 2)$, $\vec{a}=(3, -1)$ となる。すなわち右図のようにとれる。実際, 標準的な計算結果では

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\square 1, |\vec{b}|=\square \sqrt{5}$$

となるが, これを満たしている。むしろ右図で $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $|\vec{b}|$ を計算してもよいか?

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot 1+(-1)\cdot 2=1, |\vec{b}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$

$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ は次の計算が速い。

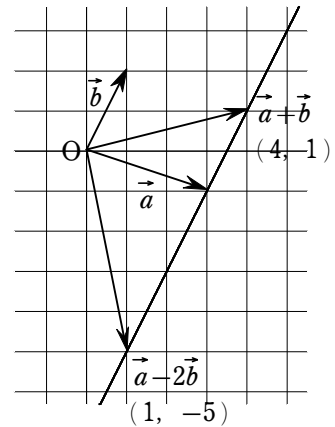
$$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2=5t^2+2t+10=5\left(t+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{49}{5} \dots\dots(\text{答})$$

$|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値は, 直線 $y=2x-7$ ($2x-y-7=0$) と原点の距離として $\frac{|2\cdot 0-0-7|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{7}{\sqrt{5}}$ (確認用?)

$$\frac{7}{\sqrt{5}} \text{ の値の見積もりは } \frac{45}{5}<\left(\frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2<\frac{50}{5} \text{ から } 3<\frac{7}{\sqrt{5}}<\sqrt{10}$$

近似値 $\sqrt{10}\doteq 3.16$ を用いれば, 求める整数は $\square 3$

厳密にやるなら $3.2^2=10.24$ から $\sqrt{10}<3.2$, $\frac{49}{5}<\frac{49}{4}$ から $\frac{7}{\sqrt{5}}<\frac{7}{2}$ など。



1 a を実数とし、関数 $f(x)=x(|x|-4)+a$ を考える.

(i) $x \leq 0$ のとき、 $f(x)$ は $x = \boxed{\quad}$ で最大値 $\boxed{\quad}$ をとる.

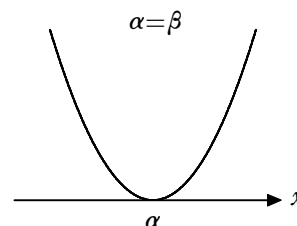
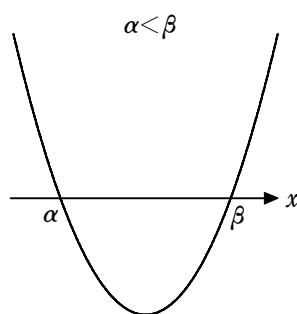
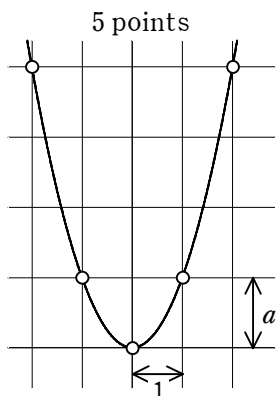
(ii) 方程式 $f(x)=0$ が異なる3個の実数解をもつとき、 a の取りうる値の範囲は $\boxed{\quad}$ である.

このとき、これら3個の実数解の和が $-\frac{1}{2}$ となるような a の値は $\boxed{\quad}$ である.

2次関数のグラフについて、頂点に関すること以外に知っておきたいのは

$y=ax^2+\dots\dots (a>0)$ の形

因数分解形 $y=a(x-\alpha)(x-\beta) (a>0)$



$$f(x)=g(x)+a, \quad g(x)=x(|x|-4)=\begin{cases} x(x-4) & (x \geq 0) \\ -x(x+4) & (x \leq 0) \end{cases}$$

$y=x(x-4)$ は $x=0, 4$ で x 軸と交わる。 $g(-x)=-g(x)$ だから $y=g(x)$ のグラフは原点对称で右図のようになる。

$y=f(x)$ のグラフはこれを y 軸の正方向へ a だけ平行移動したもの。よって $x \leq 0$ のとき、

$f(x)$ は $x = \boxed{-2}$ で最大値 $\boxed{4+a}$ をとる。

$$f(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=-a$$

$f(x)=0$ が異なる3個の実数解をもつ

$$\Leftrightarrow y=g(x), \quad y=-a \text{ が } 3 \text{ 交点をもつ}$$

a の取りうる値の範囲は

$$-4 < -a < 4 \quad \text{よって} \quad \boxed{-4 < a < 4}$$

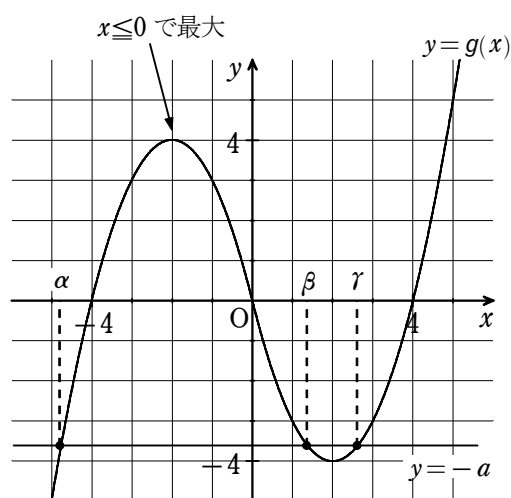
3個の実数解を $\alpha, \beta, \gamma (\alpha < \beta < \gamma)$ とすると

$$-4 < -a \leq 0 \text{ のとき, } \alpha \leq -4, \beta + \gamma = 4 \quad (\text{解と係数の関係})$$

$$0 \leq -a < 4 \text{ のとき, } \alpha + \beta = -4, 4 \leq \gamma$$

したがって $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{1}{2}$ となるのは、 $-4 < -a \leq 0$ のときで $\alpha = -\frac{9}{2}$, これから

$$-a = g\left(-\frac{9}{2}\right) \quad \text{よって} \quad a = -g\left(-\frac{9}{2}\right) = g\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{9}{2}\left(\frac{9}{2}-4\right) = \boxed{\frac{9}{4}}$$



II xy 座標平面上的原点 $O(0, 0)$ を中心とする半径1の円を C として、これと放物線 $y=f(x)$ との共有点を考える。

[1] k を実数として、 $f(x) = x^2 + k$ とする。このとき、 $y=f(x)$ と C が共有

点をもつための必要十分条件は、 $\boxed{\text{ア}} \leq k \leq \boxed{\text{イ}}$ である。

$k = \boxed{\text{ア}}$ のとき、共有点の個数は $\boxed{\text{ウ}}$ であり、 $k = \boxed{\text{イ}}$ のとき、

共有点の個数は $\boxed{\text{エ}}$ である。

円について知っておきたいこと。原点中心で半径1の円(単位円)の方程式 $x^2 + y^2 = 1$ を y について解くと

$$y = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

関数 $y = \sqrt{1 - x^2}$ は上の半円を、 $y = -\sqrt{1 - x^2}$ は下の半円を表す。

$|x|$ が十分小さいときの近似式

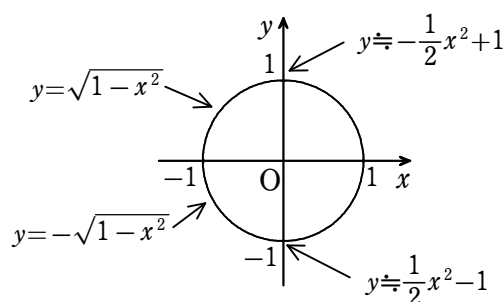
$$(1-x)^p \approx 1 - px, \quad \sqrt{1-x^2} \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$$

を用いると、単位円は

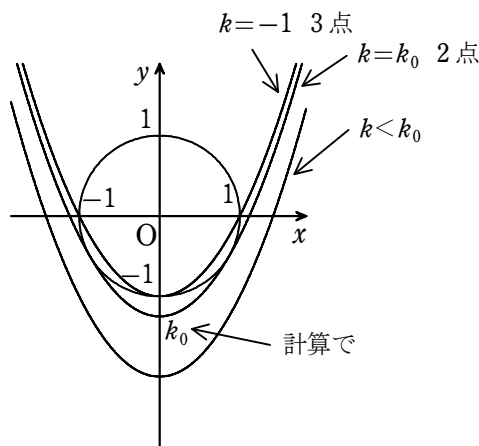
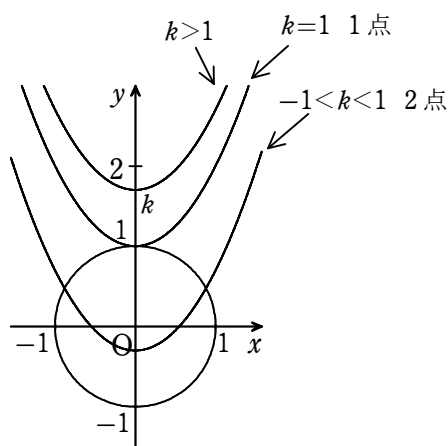
点 $(0, 1)$ の近くで放物線 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 1$

点 $(0, -1)$ の近くで放物線 $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$

に近似される。



共有点は図形で考えて、細かいところだけ計算すればよい。 $y = x^2 + k$ は k の十分大きいところから k を小さくしていくと考えやすい。



$k = -1$ のとき、点 $(0, -1)$ の近くで、放物線は円弧よりも尖っているから図のようになる。

放物線と円が接するのは $y = x^2 + k$ と $x^2 + y^2 = 1$ から x^2 を消去して $y^2 + y - k - 1 = 0$

判別式 $D = 1 + 4(k+1) = 0$ から $k_0 = -\frac{5}{4}$

共有点をもつための必要十分条件は $\boxed{-\frac{5}{4}} \leq k \leq \boxed{1}$, $k = -\frac{5}{4}$ のとき $\boxed{3}$, $k = 1$ のとき $\boxed{1}$