

絶対値を含む関数や共有点の個数など興味深いです。

2022年 慶應義塾大学 薬学部

[I](5) $x \neq 2$ である正の実数 x に対して、方程式

$$\log_{10} x + \log_{100} x^2 - \log_{0.1} |x-2| = \log_{10} a \quad (a > 0)$$

がある。

(i) $x=6$ のとき、 a の値は である。

(ii) この方程式が異なる 3 個の実数解を持つとき、 a の値の範囲は である。

方程式ですぐ $x=6$ として計算しないで、(ii) もあるのでまず方程式を簡単にする。底を統一するのが定石。

$$\log_{10} x + \frac{2 \log_{10} x}{\log_{10} 10^2} - \frac{\log_{10} |x-2|}{\log_{10} 10^{-1}} = \log_{10} a \quad \text{から} \quad \log_{10} x + \log_{10} x + \log_{10} |x-2| = \log_{10} a$$

$$\text{よって} \quad x^2 |x-2| = a \quad (x > 0, x \neq 2, a > 0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x=6 \text{ のとき} \quad a = 6^2 |6-2| = 144 \quad \dots\dots \text{(答)}$$

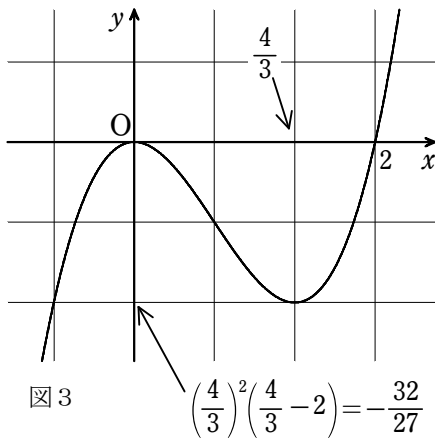
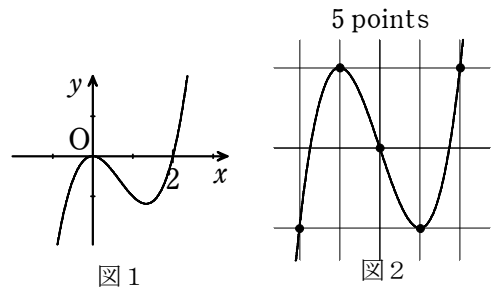
方程式 $\textcircled{1}$ が異なる 3 個の実数解を持つためには、2 つのグラフ

$$y = x^2 |x-2| \quad \dots\dots \textcircled{2} \quad y = a \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

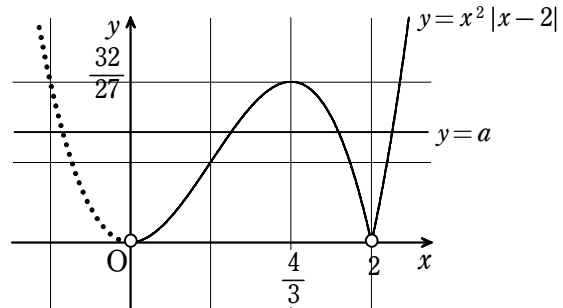
が $x > 0, x \neq 2$ の範囲に異なる 3 つの共有点をもてばよい。

$\textcircled{2}$ のグラフの概形はつぎのように考えればよい。

まず $y = x^2(x-2)$ のグラフは x 軸と $x=0$ で接し、 $x=2$ で交差するから図 1、さらに極値をもつ 3 次関数は図 2 であるから、合わせて図 3 となる。



$y = x^2 |x-2| = |x^2(x-2)|$ のグラフは $y = x^2(x-2)$ の x 軸より下の部分を上に折り返したもの。



$\textcircled{2}$ 、 $\textcircled{3}$ が異なる 3 つの共有点をもつのは $0 < a < \frac{32}{27}$

$\dots\dots \text{(答)}$

[6] 関数 $F(x) = \frac{1}{2} + \int_0^{x+1} (|t-1|-1)dt$ に対し、 $y=F(x)$ で定まる曲線を C とする。

(1) $F(x)$ を求めよ。

(2) C と x 軸の共有点のうち、 x 座標が最小の点を P 、最大の点を Q とする。 P における C の接線を ℓ とするとき、 C と ℓ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。また、 Q を通る直線 m が S を 2 等分するとき、 ℓ と m の交点 R の座標を求めよ。

被積分関数 $u = |t-1|-1 = \begin{cases} t-2 & (t \geq 1) \\ -t & (t \leq 1) \end{cases}$ のグラフは右図。

積分区間の上端 $x+1$ と 1 との大小で場合分けする。

$x+1 \leq 1$ ($x \leq 0$) のとき

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} + \int_0^{x+1} (|t-1|-1)dt = F(x) = \frac{1}{2} + \int_0^{x+1} (-t)dt \\ &= \frac{1}{2} - \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{x+1} = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x(x+2) \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

$x+1 \geq 1$ ($x \geq 0$) のとき

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} + \int_0^1 (|t-1|-1)dt + \int_1^{x+1} (|t-1|-1)dt = \frac{1}{2} + \int_0^1 (-t)dt + \int_1^{x+1} (t-2)dt \\ &= \frac{1}{2} - \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{(t-2)^2}{2} \right]_1^{x+1} = \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x(x-2) \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

面積は切り貼りして考えると計算が楽になる場合がある。

C のグラフは原点に関して対称で、右図のようになる。

$x \leq 0$ において $F'(x) = -x-1$ 、 $F(-2) = 1$ より ℓ の方程式は $y = x+2$

$x \geq 0$ における C と ℓ の交点は

$$y = \frac{1}{2}x^2 - x, \quad y = x+2, \quad x \geq 0$$

を連立して解いて $x = 2+2\sqrt{2}$, $y = 4+2\sqrt{2}$

点 $A(2+2\sqrt{2}, 4+2\sqrt{2})$, $B(2+2\sqrt{2}, 0)$ とする。

$$S = \triangle APB - \int_2^{2+2\sqrt{2}} F(x)dx$$

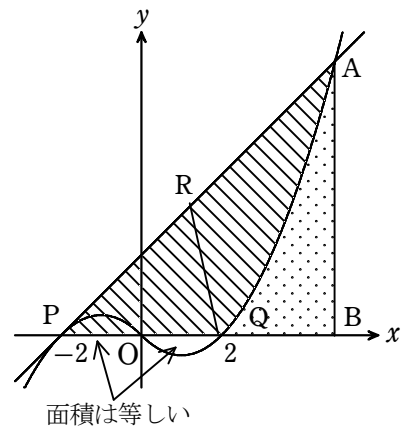
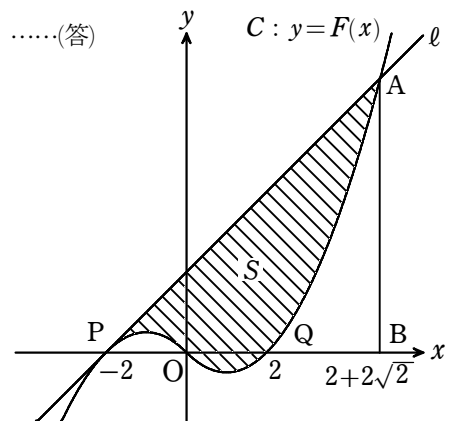
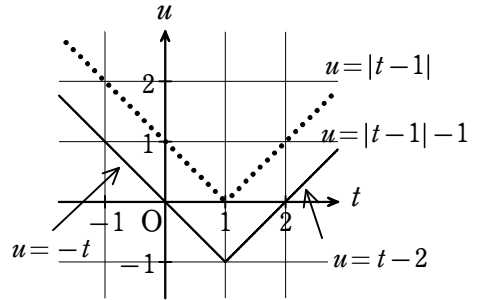
ここで $\frac{1}{2}x(x-2) = \frac{1}{2}\{(x-2)+2\}(x-2) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + (x-2)$ を用いて

$$\int_2^{2+2\sqrt{2}} F(x)dx = \left[\frac{(x-2)^3}{6} + \frac{(x-2)^2}{2} \right]_2^{2+2\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{3} + 4$$

$$S = \frac{1}{2}(4+2\sqrt{2})^2 - \left(\frac{8\sqrt{2}}{3} + 4 \right) = 8 + \frac{16\sqrt{2}}{3} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$R(r, r+2)$ とすると、 $\triangle RPQ = \frac{1}{2}S$ から

$$\frac{1}{2} \cdot 4(r+2) = 4 + \frac{8\sqrt{2}}{3} \quad \text{よって} \quad r = \frac{4\sqrt{2}}{3} \quad R\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}, 2 + \frac{4\sqrt{2}}{3}\right) \quad \dots\dots(\text{答})$$



Ⅲ m を実数とし、関数 $y=|x^2-5x+4|$ のグラフを C 、直線 $y=mx$ を l とする。

(i) グラフ C と直線 l の共有点の個数は

$\square < m < \square$ のとき 0 個, $m = \square$ のとき 1 個,
 $m < \square$, $m = \square$, または $m > \square$ のとき 2 個,
 $m = \square$ のとき 3 個, $\square < m < \square$ のとき 4 個

である。

以下、グラフ C と直線 l の共有点の個数が 3 個の場合を考え、グラフ C と直線 l の共有点を、 x 座標が小さい順に P, Q, R とする。

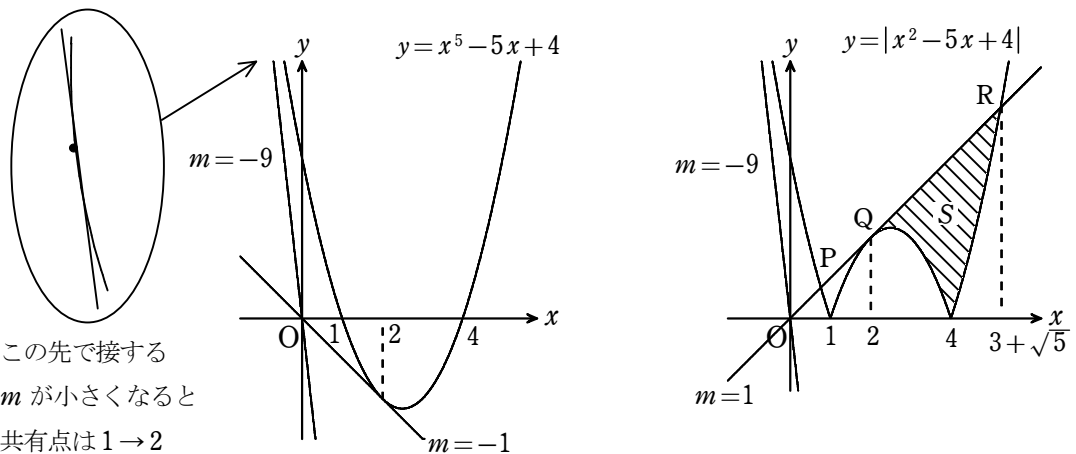
(ii) 3 点 P, Q, R の x 座標は、順に $\square - \sqrt{\square}$, \square , $\square + \sqrt{\square}$ である。

(iii) グラフ C と線分 QR で囲まれた部分の面積は $\frac{-\square + \square \sqrt{\square}}{\square}$ である。

$y=x^2-5x+4$ と $y=mx$ が接するような m の値は $x^2-5x+4=mx$ が重解をもつことから、判別式

$$D=(m+5)^2-4\cdot 4=(m+9)(m+1)=0 \text{ よって } m=-9, -1$$

$y=|x^2-5x+4|$ のグラフは $y=x^2-5x+4$ の x 軸より下の部分を上側に折り返したもの。(下右図)



この先で接する
 m が小さくなると
 共有点は $1 \rightarrow 2$

共有点の個数は

m	...	-9	...	0	...	1	...
個数	2	1	0	2	4	3	2

$y=x^2-5x+4$ と $y=x$ の共有点 P, R の x 座標は $x^2-5x+4=x$ を解いて $x=3\pm\sqrt{5}$

3 点 P, Q, R の x 座標は、順に $3-\sqrt{5}, 2, 3+\sqrt{5}$

求める面積 S は

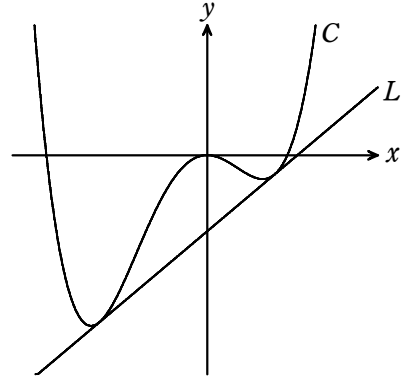
$$\begin{aligned} S &= \int_2^{3+\sqrt{5}} \{x - |x^2 - 5x + 4|\} dx = \int_2^4 \{x - (-x^2 + 5x - 4)\} dx + \int_4^{3+\sqrt{5}} \{x - (x^2 - 5x + 4)\} dx \\ &= \int_2^4 (x - 2)^2 dx + \int_4^{3+\sqrt{5}} \{-(x-3)^2 + 5\} dx = \left[\frac{(x-2)^3}{3} \right]_2^4 + \left[-\frac{(x-3)^3}{3} + 5x \right]_4^{3+\sqrt{5}} \\ &= \frac{8}{3} - \frac{5\sqrt{5}-1}{3} + 5(\sqrt{5}-1) = \frac{-6+10\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$

Ⅲ xy 平面上的曲線 C を $y=x^2(x-1)(x+2)$ とする.

(1) C に 2 点で下から接する直線 L の方程式は

$$y = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}x + \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

である.



L の方程式を $y=mx+n$ とし, C と L の 2 つの接点の x 座標を a, b とすると, C の x^4 の係数が 1 であることを考慮して, C と L の差の関数は

$x^2(x-1)(x+2)-(mx+n)=(x-a)^2(x-b)^2$ ← これがすべて
と表される. 両辺展開して各項の係数を比較すると 右辺は $\{x^2-(a+b)x+ab\}^2$ から計算

$$-2(a+b)=1 \quad \dots\dots\textcircled{1} \quad (a+b)^2+2ab=-2 \quad \dots\dots\textcircled{2}$$

$$-2ab(a+b)=-m \quad \dots\dots\textcircled{3} \quad (ab)^2=-n \quad \dots\dots\textcircled{4}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から } a+b=-\frac{1}{2}, \quad ab=-\frac{9}{8}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ から } m=\frac{9}{8}, \quad n=-\frac{81}{64} \quad \dots\dots(\text{答})$$

[IV] 座標平面の点 $A(a, b)$ を 1 つ固定し, 曲線 $y=x^2$ 上の点 $P(x, x^2)$ と点 A との距離の 2 乗を $g(x)$ とおく.

関数 $y=g(x)$ のグラフが区間 $(-\infty, \infty)$ において下に凸となるための条件は $b \leq \boxed{\text{あ}}$ となることである.

$b > \boxed{\text{あ}}$ のとき $y=g(x)$ のグラフは 2 つの変曲点を持ち, その x 座標は $\boxed{\text{い}}$ および $\boxed{\text{う}}$ で

ある. ただし $\boxed{\text{い}} < \boxed{\text{う}}$ とする. また関数 $y=g(x)$ が極小となる x がただ 1 つであるために $a,$

b が満たすべき条件を $b \leq F(a)$ と書くと, $F(a) = \boxed{\text{え}}$ である. $b = F(a)$ のとき, 関数 $y=g(x)$ は

$x = \boxed{\text{お}}$ において最小値をとる. さらに, 連立不等式 $x \geq 0, y \geq x^2$ が表す領域を D とするとき,

曲線 $y=F(x)$ の D に含まれる部分の長さ L を求めると $L = \boxed{\text{か}}$ である.

$$g(x)=(x-a)^2+(x^2-b)^2=x^4-(2b-1)x^2-2ax+a^2+b^2 \quad \text{から}$$

$$g'(x)=4x^3-2(2b-1)x-2a, \quad g''(x)=12x^2-2(2b-1)$$

$$y=g(x) \text{ が } (-\infty, \infty) \text{ で下に凸} \Leftrightarrow (-\infty, \infty) \text{ で } g''(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2(2b-1) \geq 0 \text{ よって } b \leq \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$b > \frac{1}{2} \text{ のとき, } g''(x)=0 \text{ は異なる 2 実数解 } \boxed{-\sqrt{\frac{2b-1}{6}}}, \boxed{\sqrt{\frac{2b-1}{6}}} \text{ をもち, これが変曲点の } x \text{ 座標}$$

である.

$y=g(x)$ が1点で極小 $\Leftrightarrow g'(x)=4x^3-2(2b-1)x-2a$ が1点で $- \rightarrow 0 \rightarrow +$ と変わる

$\Leftrightarrow y=4x^3-2(2b-1)x$ と $y=2a$ が共有点1つ

$h(x)=4x^3-2(2b-1)x=4x\left(x^2-\frac{2b-1}{2}\right)$ とおく。

$b \leq \frac{1}{2}$ のとき $y=h(x)$ は単調増加で $y=h(x)$ と $y=2a$ の共有点は1つ

$b > \frac{1}{2}$ のとき右図, ただし $\alpha = \sqrt{\frac{2b-1}{6}}$, $h(\alpha) = -8\alpha^3$

共有点が1つとなるのは $2a \leq -8\alpha^3$ または $2a \geq 8\alpha^3$

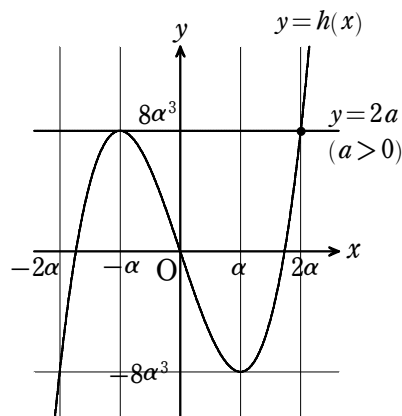
まとめると $a^2 \geq 16\alpha^6$ すなわち $a^2 \geq \frac{2(2b-1)^3}{27}$

これから $\frac{3a^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}} \geq 2b-1$ よって $b \leq \frac{3a^{\frac{2}{3}}}{2\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{2}$ $F(a)$

$b=F(a)$ のとき, 最小値をとる x の値は,

$a > 0$ のとき $2a = 8\alpha^3$ から $x = 2\alpha = \sqrt[3]{2a}$

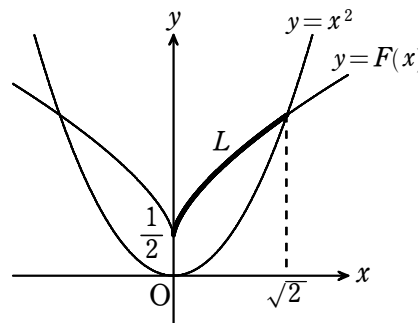
$a < 0$ のとき $2a = -8\alpha^3 = (-2\alpha)^3$ から $x = -2\alpha = \sqrt[3]{2a}$



$x \geq 0$ における $y=x^2$ と $y=F(x)$ の交点の x 座標は $x^2 = \frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{2}$

の解, $x^{\frac{2}{3}} = z$ とすると $z^3 - \frac{3}{2\sqrt[3]{2}}z - \frac{1}{2} = 0$

$(z - \sqrt[3]{2})\left(z + \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)^2 = 0$ $z \geq 0$ より $z = \sqrt[3]{2}$, $x = \sqrt{2}$



$F(x) = \frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{2}$, $F'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}x^{-\frac{1}{3}}$, $x^{\frac{2}{3}} = z$ とすると $x = z^{\frac{3}{2}}$, $dx = \frac{3}{2}z^{\frac{1}{2}}dz$

x		0	\rightarrow	$\sqrt{2}$
z		0	\rightarrow	$\sqrt[3]{2}$

$$L = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \{F'(x)\}^2} dx = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}x^{-\frac{2}{3}}} dx = \int_0^{\sqrt[3]{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}z^{-1}} \frac{3}{2}z^{\frac{1}{2}} dz$$

$$= \int_0^{\sqrt[3]{2}} \frac{3}{2} \sqrt{z + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}} dz = \left[\left(z + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sqrt[3]{2}} = \left(\frac{3}{\sqrt[3]{4}} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \dots (\text{答})$$

曲線の長さを求める積分は一般に難しいですが, $y = x^{\frac{2}{3}}$ の曲線の長さは求められるんですね。