

2022年 早稲田大学 教育学部

③  $O(0, 0)$ ,  $A(0, 1)$ ,  $B(p, q)$  を座標平面上の点とし,  $p$  は  $0$  でないとする。  $A$  と  $B$  を通る直線を  $\ell$  とおく。  $O$  を中心とし  $\ell$  に接する円の面積を  $D_1$  で表す。 また  $3$  点

$O, A, B$  を通る円周で囲まれる円の面積を  $D_2$  とおく。 次の問いに答えよ。

(1)  $D_1$  を  $p, q$  を使って表せ。

(2) 点  $(2, 2\sqrt{3})$  を中心とする半径  $1$  の円周を  $C$  とする。 点  $B$  が  $C$  上を動くときの  $D_1$  と  $D_2$  の積

$$D_1 D_2$$

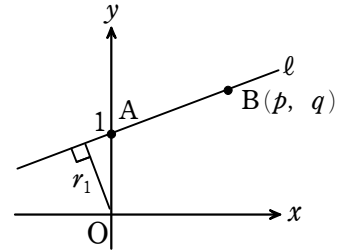
の最小値と最大値を求めよ。

(1)  $O$  を中心とし  $\ell$  に接する円の半径を  $r_1$  とする。 直線  $\ell$  の方程式は,

$$y = \frac{q-1}{p}x + 1 \quad \text{すなわち} \quad (q-1)x - py + p = 0$$

$O$  と  $\ell$  の距離から  $r_1 = \frac{|p|}{\sqrt{(q-1)^2 + p^2}}$  これから

$$D_1 = \pi r_1^2 = \frac{\pi p^2}{p^2 + (q-1)^2} \quad \dots\dots(\text{答})$$



(2)  $3$  点  $O, A, B$  を通る円の中心を  $O_2$ , 半径を  $r_2$  とする。

$O_2$  は  $OA$  の垂直二等分線  $y = \frac{1}{2}$  上にある。 円  $O_2$  において

円周角と中心角の関係から

$$\angle ABO = \frac{1}{2} \angle AO_2O = \angle MO_2O$$

ただし  $M$  は  $AO$  の中点。  $O$  から  $\ell$  に引いた垂線の交点を  $H$  とすると

$\triangle OBH \sim \triangle OO_2M$  であるから  $OH : OM = OB : OO_2$

$$r_1 : \frac{1}{2} = OB : r_2 \quad \text{よって} \quad r_1 r_2 = \frac{1}{2} OB$$

したがって

$$D_1 D_2 = \pi r_1^2 \cdot \pi r_2^2 = \pi^2 (r_1 r_2)^2 = \pi^2 \cdot \frac{1}{4} OB^2$$

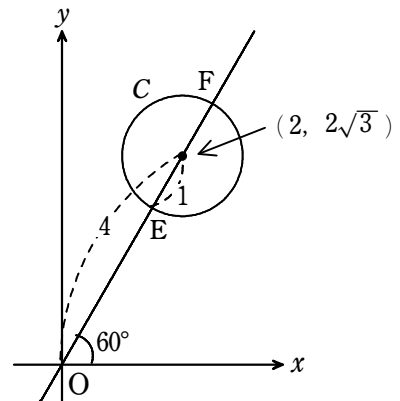
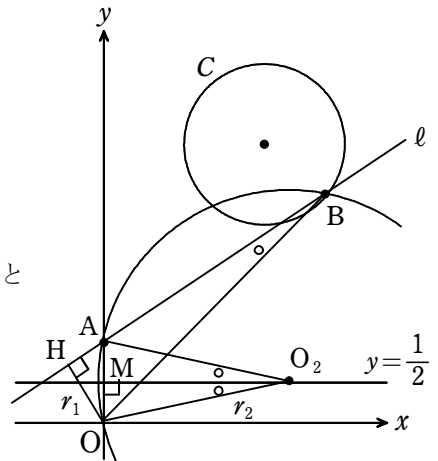
$O$  と  $C$  の中心を通る直線が  $C$  と交わる  $2$  点のうち  $O$  に近い

方を  $E$ , 遠い方を  $F$  とすると  $E\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ ,  $F\left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

$OB$  の長さは,  $B$  が  $E$  に一致するとき最小,  $F$  のとき最大, よって

$$D_1 D_2 \text{ の最小値は } \pi^2 \cdot \frac{1}{4} OE^2 = \frac{9\pi^2}{4} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$D_1 D_2 \text{ の最大値は } \pi^2 \cdot \frac{1}{4} OF^2 = \frac{25\pi^2}{4}$$



<感想> (2) では(1) と同様  $r_2^2 = \frac{(p^2 + q^2 - q)^2 + p^2}{4p^2}$  まで求めたがここで挫折。 図形の性質を使うことに

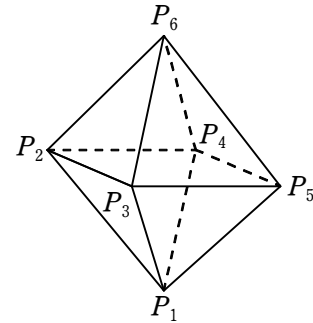
方針転換したのが上の解答例。 河合塾の解答では  $r_2^2$  の分子が因数分解できるとのこと, 凄い。

[IV] 一辺の長さが  $\sqrt{3}+1$  である正八面体の頂点を下の図のように  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$  とする。

各  $i=1, 2, \dots, 6$  に対して、 $P_i$  以外の5点を頂点とする四角錐（すい）のすべての面に内接する球（内部を含む）を  $B_i$  とする。 $B_1$  の体積を  $X$  とし、 $B_1$  と  $B_2$  の共通部分の体積を  $Y$  とし、 $B_1, B_2, B_3$  の共通部分の体積を  $Z$  とする。さらに  $B_1, B_2, \dots, B_n$  を合わせて得られる立体の体積を  $V_n (n=2, 3, \dots, 6)$  とする。以下の間に答えよ。

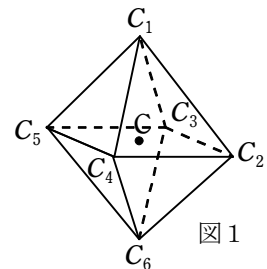
ただし (1) は答のみを解答用紙の該当欄に書け。

- (1)  $V_n = aX + bY + cZ$  となる整数  $a, b, c$  を  $n=2, 3, 6$  の場合について求めよ。
- (2)  $X$  の値を求めよ。
- (3)  $V_2$  の値を求めよ。



（真ん中の正方形の頂点が  $P_2, P_3, P_5, P_4$  の順はなぜ → サイコロの目と同じ？）

正八面体の中心を  $C$ ，球  $B_i$  の中心を  $C_i$  とする。頂点  $P_i$  の反対側が  $P_{7-i}$  だから、 $C_i$  は線分  $CP_{7-i}$  上にある。6つの  $C_i$  は対称性から図1の正八面体の頂点になる。



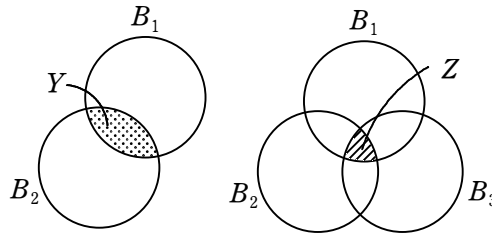
(1) 右図より

$$V_2 = 2X - Y$$

$$V_3 = 3X - 3Y + Z$$

$V_6$  については、図1において

中心  $C_i$  が辺でつながる球  $B_i$  どうしは体積  $Y$  の共通部分を持ち、1つの面の



3頂点を中心とする3つの球は体積  $Z$  の共通部分をもつ。正八面体の辺は12，面は8だから

$$V_6 = 6X - 12Y + 8Z$$

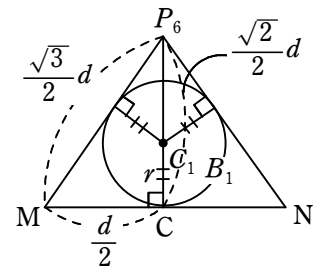
(2) 辺  $P_2P_3, P_4P_5$  の中点をそれぞれ  $M, N$  とし、面  $P_6MN$  による球  $B_1$

の断面が右図。もとの正八面体の一辺の長さを  $d = \sqrt{3} + 1$ ， $B_1$  の半径を  $r$

とすると、 $\triangle P_6MN$  の面積について

$$\frac{1}{2}d \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}d = \frac{1}{2}r \left( \frac{\sqrt{3}}{2}d + \frac{\sqrt{3}}{2}d + d \right) \quad \text{から} \quad r = \frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{3}+1)}d = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$X = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi \quad \dots\dots(\text{答})$$



(3) 図1において面  $CC_1C_2$  による球  $B_1, B_2$  の断面が右図。 $CC_1 = CC_2 = r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ， $C_1C_2 = \sqrt{2}r = 1$

$C_1$  を原点  $O$ ， $C_1C_2$  にそって  $x$  軸をとった。

$$\frac{V_2}{2\pi} = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} y^2 dx = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{2} - x^2 \right) dx$$

$$= \left[ \frac{x}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{24} \right) - \left( -\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{6\sqrt{2}} \right)$$

$$= \frac{5}{24} + \frac{1}{3\sqrt{2}} \quad \text{よって} \quad V_2 = \left( \frac{5}{12} + \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \pi \quad \dots\dots(\text{答})$$

