

放物線の直交する2接線に関する問題

2022年 東京大学 文科

第1問

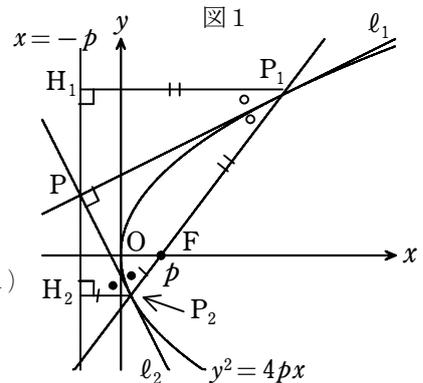
a, b を実数とする。座標平面上の放物線 $y=x^2+ax+b$ を C とおく。 C は、原点で垂直に交わる2本の接線 ℓ_1, ℓ_2 を持つとする。ただし、 C と ℓ_1 の接点 P_1 の x 座標は、 C と ℓ_2 の接点 P_2 の x 座標より小さいとする。

- (1) b を a で表せ。また a の値はすべての実数を取りうることを示せ。
- (2) $i=1, 2$ に対し、円 D_i を、放物線 C の軸上に中心を持ち、点 P_i で ℓ_i と接するものと定める。 D_2 の半径が D_1 の半径の2倍となるとき、 a の値を求めよ。

解答例にはならないと思いますが、以下のような解き方も考えられます。

放物線 $y^2=4px$ の焦点は $F(p, 0)$ 、準線は $x=-p$ 、この放物線上の点 P_1, P_2 における接線が交点 P で直交するとき、 P は準線上にある。また、直線 P_1P_2 は焦点 F を通る。 $P_1H_1=P_1F, P_2H_2=P_2F$ 、接線 ℓ_1, ℓ_2 はそれぞれ $\angle FP_1H_1, \angle FP_2H_2$ を2等分するから

$H_1F \perp \ell_1, H_2F \perp \ell_2$ よって $H_1F \perp H_2F$ また $PH_1=PF=PH_2$ (図1)



$p = \frac{1}{4}$ とし、 x と y を入れ換えたのが図2、与えられた放物線

$$C: y = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4}$$

が原点で垂直に交わる2本の接線を持つためには、頂点の y 座標 $b - \frac{a^2}{4} = \frac{1}{4}$ から $b = \frac{a^2 + 1}{4}$ (図3)

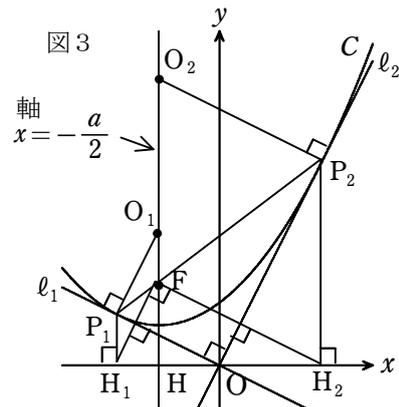
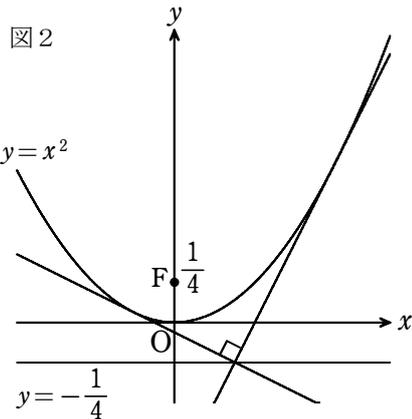
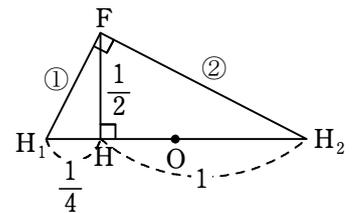


図3で $F\left(-\frac{a}{2}, \frac{1}{2}\right)$, O_i は円 D_i の中心、四角形 $O_1P_1H_1F, O_2P_2H_2F$ は平行四辺形、 $FH_1 : FH_2 = O_1P_1 : O_2P_2 = 1 : 2, FH = \frac{1}{2}, OH_1 = OH_2 = \frac{5}{8}$

したがって $OH = \frac{a}{2} = \frac{3}{8}$ から $a = \frac{3}{4}$



2022年 京都大学 文系

4

a, b を正の実数とする. 直線 $L: ax+by=1$ と曲線 $y=-\frac{1}{x}$ との2つの交点のうち, y 座標が正のものを P , 負のものを Q とする. また, L と x 軸との交点を R とし, L と y 軸との交点を S とする. a, b が条件

$$\frac{PQ}{RS} = \sqrt{2}$$

を満たしながら動くとき, 線分 PQ の中点の軌跡を求めよ.

$$ax+by=1 \text{ と } y=-\frac{1}{x} \text{ から } y \text{ を消去すると } ax^2-x-b=0 \dots \textcircled{1}$$

$a > 0, b > 0$ から, 判別式 $D=1+4ab > 0$, $\textcircled{1}$ は異なる2実数解をもつ.

P, Q の x 座標を x_P, x_Q ($x_P < x_Q$) とすると $\textcircled{1}$ を解いて

$$x_P = \frac{1 - \sqrt{1+4ab}}{2a}, \quad x_Q = \frac{1 + \sqrt{1+4ab}}{2a}$$

P, Q の x 軸への正射影を P', Q' とすると, x 軸上で長さの比を考えて

$$\frac{PQ}{RS} = \frac{P'Q'}{RO} = \sqrt{2} \text{ から } x_Q - x_P = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{a}$$

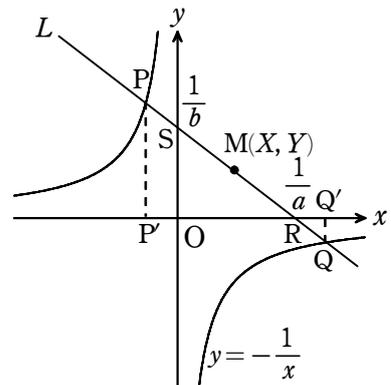
$$\text{すなわち } \frac{2\sqrt{1+4ab}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{a}, \quad 1+4ab=2 \text{ よって } ab = \frac{1}{4} \dots \textcircled{2}$$

PQ の中点を $M(X, Y)$ とすると $\textcircled{1}$ の解と係数の関係から

$$x_P + x_Q = \frac{1}{a} \text{ よって } X = \frac{x_P + x_Q}{2} = \frac{1}{2a}, \quad a > 0 \text{ から } X > 0$$

M は L 上にあるから $aX+bY=1$ よって $Y = \frac{1}{2b}$, $\textcircled{2}$ から $XY = \frac{1}{4ab} = 1$

a, b が $\textcircled{2}$ を満たしながら動くとき, 中点 M は双曲線 $y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) を描く.



これから $\triangle ORS$ の面積
 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$ は一定とわかる

$M\left(\frac{1}{2a}, \frac{1}{2b}\right)$ は RS の
 中点でもある

<余談> 「双曲線」と「中点」から連想されるのは双曲線の次の性質である。

$$\text{双曲線 } C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

とし, C 上の点 M における接線 ℓ と漸近線 $y = \pm \frac{b}{a}x$ との交点を R, S とすると, M は線分 RS の中点である.

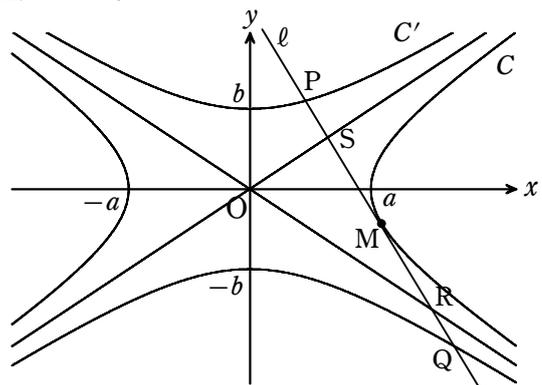
上の問題をヒントに計算すると次の性質にも気付いた.

C と共通な漸近線をもつ

$$\text{双曲線 } C': \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

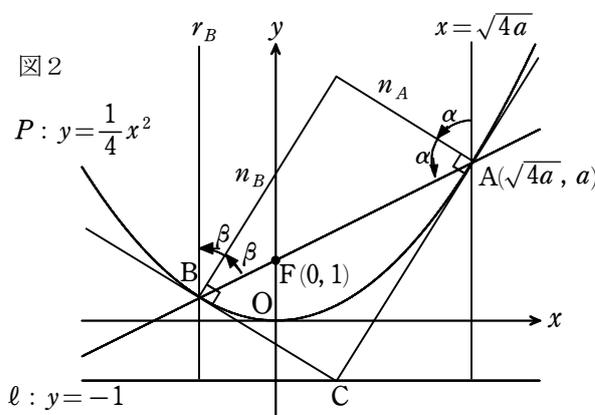
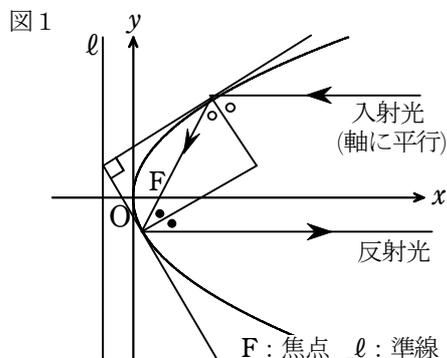
と ℓ との交点を P, Q とすると, M は線分 PQ の中点にもなっている.

さらに $\frac{PQ}{RS} = \sqrt{2}$ である.



2 xy 平面上の放物線 $P: y^2=4x$ 上に異なる 2 点 A, B をとり, A, B それぞれにおいて P への接線と直交する直線を n_A, n_B とする. a を正の数として, 点 A の座標を $(a, \sqrt{4a})$ とするとき, 以下の各問いに答えよ.

- (1) n_A の方程式を a を用いて表せ.
- (2) 直線 AB と直線 $y=\sqrt{4a}$ とがなす角の 2 等分線のひとつが, n_A に一致するとき, 直線 AB の方程式を a を用いて表せ.
- (3) (2) のとき, 点 B を通る直線 r_B を考える. r_B と直線 AB とがなす角の 2 等分線のひとつが, n_B に一致するとき, r_B の方程式を a を用いて表せ.
- (4) (3) のとき, 直線 AB と放物線 P で囲まれた図形の面積を S_1 とし, P と直線 $y=\sqrt{4a}$, 直線 $x=-1$ および (3) の r_B で囲まれた図形の面積を S_2 とする. a を変化させたとき, $\frac{S_1}{S_2}$ の最大値を求めよ.



放物面による光の反射が問題の背景にありそうです。(図1) 問題を直線 $y=x$ に関して対称移動して考えてみます. 出題意図にはそぐわないかもしれませんが, 図形の方程式では x, y を入れ換え, 点では x, y 座標を入れ換えます. (この対称移動を T 変換と呼ぶことにします)

放物線 $y^2=4x$ を T 変換して $y=\frac{1}{4}x^2$, このとき焦点は $F(0, 1)$, 準線は $l: y=-1$

(1) $y'=\frac{1}{2}x$ から $A(\sqrt{4a}, a)$ における法線 n_A の方程式は

$$y-a = -\frac{2}{\sqrt{4a}}(x-\sqrt{4a}) \quad \text{から} \quad y = -\frac{1}{\sqrt{a}}x + a + 2$$

T 変換して $y = -\sqrt{a}x + a\sqrt{a} + 2\sqrt{a}$ ……(答)

(2) 図2のように角 α をとると, n_A の傾きは $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{2}{\sqrt{4a}}$ よって $\tan \alpha = \sqrt{a}$

直線 AB の傾きは $\tan\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) = -\frac{1}{\tan 2\alpha} = -\frac{1 - \tan^2 \alpha}{2 \tan \alpha} = \frac{a-1}{2\sqrt{a}}$

AB の方程式は $y-a = \frac{a-1}{2\sqrt{a}}(x-\sqrt{4a})$ から $y = \frac{a-1}{2\sqrt{a}}x + 1$ ← AB は焦点 F を通る

T 変換して $2\sqrt{a}x - (a-1)y - 2\sqrt{a} = 0$ ……(答)

(3) Bのx座標は $y = \frac{1}{4}x^2$ と $y = \frac{a-1}{2\sqrt{a}}x + 1$ を連立して

$$x^2 - \left(2\sqrt{a} - \frac{2}{\sqrt{a}}\right)x - 4 = 0 \quad \text{から} \quad (x - 2\sqrt{a})\left(x + \frac{2}{\sqrt{a}}\right) = 0, \quad x < 0 \text{ より } x = -\frac{2}{\sqrt{a}}$$

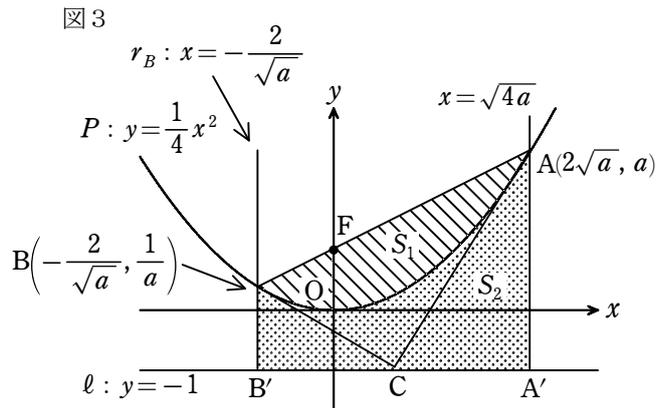
Bにおける接線の傾きは $-\frac{1}{\sqrt{a}}$ で n_A の傾きに一致するから $n_B \perp n_A$

図2のように角 β をとると、 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ から $2\alpha + 2\beta = \pi$ よって r_B は直線 $x = \sqrt{4a}$ に平行。

r_B は B を通るから、その方程式は $x = -\frac{2}{\sqrt{a}}$, T変換して $y = -\frac{2}{\sqrt{a}}$ ……(答)

(4) 直線 AB が放物線 P より上にあるから

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-\frac{2}{\sqrt{a}}}^{2\sqrt{a}} \left(\frac{a-1}{2\sqrt{a}}x + 1 - \frac{1}{4}x^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\frac{2}{\sqrt{a}}}^{2\sqrt{a}} \left\{ -\left(x + \frac{2}{\sqrt{a}}\right)\left(x - 2\sqrt{a}\right) \right\} dx \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \left\{ 2\sqrt{a} - \left(-\frac{2}{\sqrt{a}}\right) \right\}^3 \\ &= \frac{1}{3} \left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} \right)^3 \end{aligned} \quad \leftarrow \frac{1}{6} \text{公式}$$



四角形 $ABB'A'$ は台形だから

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2} \left\{ (a+1) \left(\frac{1}{a} + 1 \right) \right\} \left\{ 2\sqrt{a} - \left(-\frac{2}{\sqrt{a}}\right) \right\} = \left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} \right)^3 \quad \text{よって} \quad S_2 = \frac{2}{3} \left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} \right)^3$$

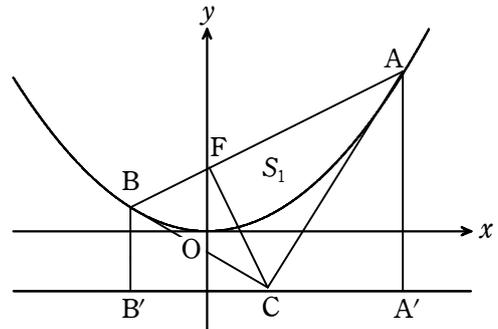
したがって $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{2}$ この値は a によらず一定で、最大値といえる。

右図で AC, BC が放物線の 2 接線であるとき一般に

$$S_1 = \frac{2}{3} \triangle ABC$$

が成り立つ。また $\triangle AFC \equiv \triangle AA'C$, $\triangle BFC \equiv \triangle BB'C$ から

$$\text{四角形 } ABB'A' = 2\triangle ABC \quad \text{よって} \quad S_2 = \frac{4}{3} \triangle ABC$$



<感想> 図形の知識をどこまで使って良いのか難しいですね。

(4) の「 a を変化させたとき、 $\frac{S_1}{S_2}$ の最大値を求めよ」はいささか不親切な気がします。

「 a によらず一定であることを示せ」くらいでよいのでは。