

複素数平面の問題

2022年 上智大学 理工学部

3 複素数からなる数列 $\{z_n\}$ を、次の条件で定める。

$$z_1=0, \quad z_{n+1}=(1+i)z_n-i \quad (n=1, 2, \dots)$$

正の整数 n に対し、 z_n に対応する複素数平面上の点を A_n とおく。

(1) $z_2 = \square + \square i$, $z_3 = \square + \square i$, $z_4 = \square + \square i$ である。

(2) $r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ を用いて、 $1+i = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ のように $1+i$ を極形式で表すとき、

$$r = \sqrt{\square}, \quad \theta = \frac{\square}{\square} \pi \quad \text{である。}$$

(3) すべての正の整数 n に対する $\triangle PA_n A_{n+1}$ が互いに相似になる点 P に対応する複素数は、

$$\square + \square i \quad \text{である。}$$

(4) $|z_n| > 1000$ となる最小の n は $n = \square$ である。

(5) A_{2022+k} が実軸上にある最小の正の整数 k は $k = \square$ である。

数列の漸化式を複素数平面上の回転に結びつけたなるほどと思わせる問題です。

$$z_{n+1}=(1+i)z_n-i \quad \text{から} \quad z_{n+1}-1=(1+i)(z_n-1)$$

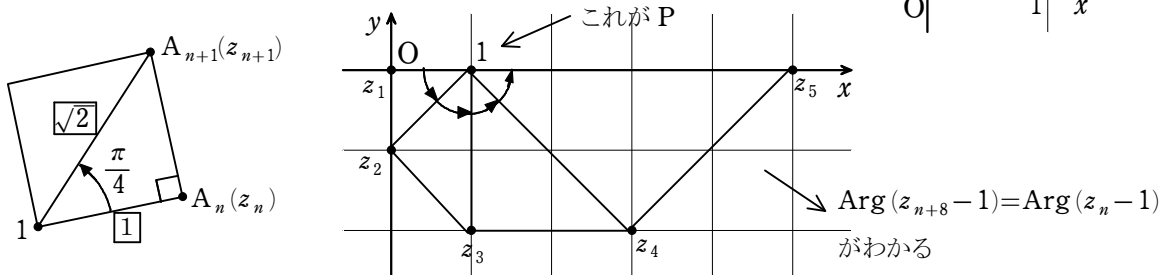
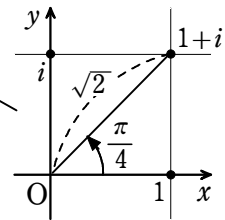
$a_{n+1} = pa_n + q$ と同様に

$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ と変形

$$\frac{z_{n+1}-1}{z_n-1} = 1+i \quad \dots \textcircled{1} \quad \text{ここで} \quad \text{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}, \quad |1+i| = \sqrt{2}$$

点 $A_n(z_n)$ を点 1 の周りで $\frac{\pi}{4}$ だけ回転し $\sqrt{2}$ 倍に拡大した点が $A_{n+1}(z_{n+1})$

であることを ① は表している。(下左図)



(1) 上右図から $z_2 = \square + \square i$, $z_3 = \square + \square i$, $z_4 = \square + \square i$

(2) $r = |1+i| = \sqrt{\square}$, $\theta = \text{Arg}(1+i) = \frac{\square}{\square} \pi$

(3) 点 P に対応する複素数は、 $\square + \square i$

(4) ① から $z_n - 1 = (z_1 - 1)(1+i)^{n-1}$

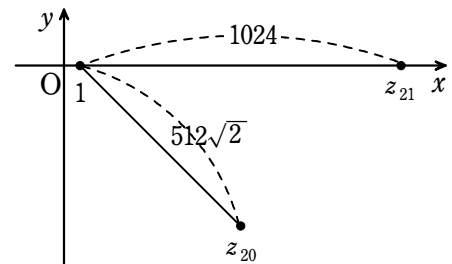
$$|z_n - 1| = |z_1 - 1| |1+i|^{n-1} \quad \text{よって} \quad |z_n - 1| = (\sqrt{2})^{n-1}$$

$|z_n - 1| - 1 \leq |z_n| \leq |z_n - 1| + 1$ であるから

$$|z_{20}| \leq |z_{20} - 1| + 1 = 512\sqrt{2} + 1 < 1000$$

$$1000 < 1024 - 1 = |z_{21} - 1| - 1 \leq |z_{21}|$$

したがって $|z_n| > 1000$ となる最小の n は $n = \square$ である。



$$|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

(5) A_n が実軸上にあるのは $n \equiv 1 \pmod{4}$ のとき

$2022+k \equiv 1 \pmod{4}$ となる最小の正の整数 k は $k = \square$ である。

- [1] i を虚数単位とし、 O を原点とする複素数平面上で、 $1+i$ 、 $-1+3i$ を表す点をそれぞれ A 、 B とする。
 m は $m > 1$ を満たす実数とし、点 C は線分 OA を $m : 1$ に外分する点とする。 $\triangle OBC$ の面積が 4 であるとき、次の問いに答えよ。
- [1] 半直線 OA から半直線 OB までの回転角を θ とおく。 $\sin \theta$ の値を求めよ。
- [2] m の値を求めよ。
- [3] $\triangle OBC$ の内接円について、中心を表す複素数を z 、半径を r とする。 z と r の値を求めよ。

複素数平面の問題に見えますが、図形的に考えれば複素数をそれほど用いなくても答は分かります。

出題の主旨に反するのかも。

- [1] OA 、 OB の傾きはそれぞれ 1 、 -1 であるから $\angle OAB = \frac{\pi}{2}$

$$\text{よって } \sin \theta = \frac{AB}{OB} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \dots\dots(\text{答})$$

- [2] $\triangle OBC = \frac{1}{2} OC \cdot AB$ から $4 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} OC$

$$\text{よって } OC = 2\sqrt{2} \quad \text{すなわち } C(2+2i)$$

C は線分 OA を $2 : 1$ に外分するから $m = 2$ $\dots\dots(\text{答})$

- [3] $\triangle OBC$ において、 BA は $\angle OBC$ の二等分線、 $\angle BOC$ の二等分線と BA との交点が求める内心 z

$$OA : OB = \sqrt{2} : \sqrt{10} = 1 : \sqrt{5}$$

より点 z は AB を $1 : \sqrt{5}$ に内分するから

$$\begin{aligned} z &= \frac{\sqrt{5}(1+i) + (-1+3i)}{\sqrt{5}+1} = \frac{(\sqrt{5}-1) + (\sqrt{5}+3)i}{\sqrt{5}+1} \\ &= \frac{(\sqrt{5}-1)^2 + (\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+3)i}{5-1} = \frac{(3-\sqrt{5}) + (1+\sqrt{5})i}{2} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

$$\triangle OBC = \frac{1}{2} r (OB + BC + CO) \quad \text{から} \quad 4 = \frac{1}{2} r (\sqrt{10} + \sqrt{10} + 2\sqrt{2})$$

$$r = \frac{4}{\sqrt{10} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{2} \quad \dots\dots(\text{答})$$

<別解>

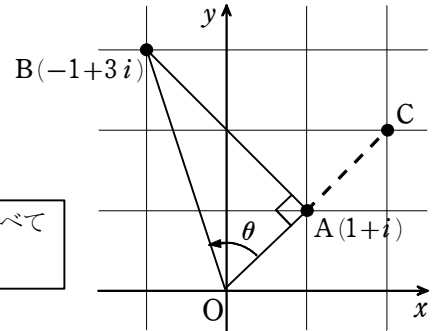
$$[1] \quad \frac{-1+3i}{1+i} = \frac{(-1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1+2i = \sqrt{5} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}i \right)$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

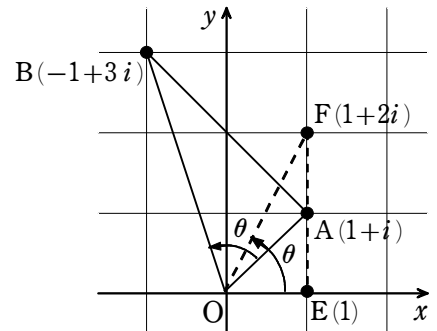
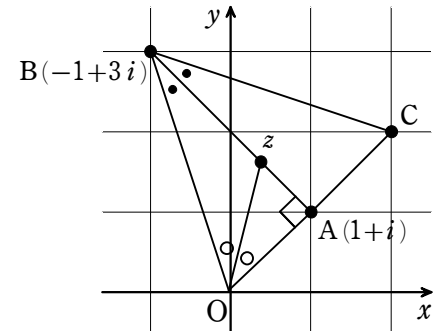
$$[3] \quad \tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \text{ に等しいから, } \quad \tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

点 z と A の距離が内接円の半径 r に等しいから

$$r = OA \tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{2}$$



これからすべて簡単になる



$\triangle OAB \sim \triangle OEF$

[6] i は虚数単位とする。次の条件(I), (II)をどちらも満たす複素数 z 全体の集合を S とする。

(I) z の虚部は正である。

(II) 複素数平面上の点 $A(1)$, $B(1-iz)$, $C(z^2)$ は一直線上にある。

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 1でない複素数 α について、 α の虚部が正であることは、 $\frac{1}{\alpha-1}$ の虚部が負であるための必要十分条件であることを示せ。
- (2) 集合 S を複素数平面上に図示せよ。
- (3) $w = \frac{1}{z-1}$ とする。 z が S を動くとき、 $\left| w + \frac{i}{\sqrt{2}} \right|$ の最小値を求めよ。

(1) $\alpha = a + bi$ (a, b は実数) とすると $\frac{1}{\alpha-1} = \frac{1}{(a-1) + bi} = \frac{(a-1) - bi}{(a-1)^2 + b^2}$

$\text{Im } \alpha = b$, $\text{Im } \frac{1}{\alpha-1} = \frac{-b}{(a-1)^2 + b^2}$ であるから $\text{Im } \alpha > 0 \Leftrightarrow \text{Im } \frac{1}{\alpha-1} < 0$

(2) 条件(I)より $z \neq 0$, $z \neq \pm 1$ としてよい。よって A と B , A と C は異なる。

条件(II)について、 A, B, C が一直線上にあるならば \overrightarrow{AB} と \overrightarrow{AC} のなす角

$\text{Arg} \frac{z^2-1}{(1-iz)-1}$ は 0 または π であるから $\frac{z^2-1}{-iz}$ は実数、すなわち

$$\frac{z^2-1}{-iz} = \frac{\bar{z}^2-1}{i\bar{z}} \quad \text{これから} \quad (z^2-1)\bar{z} = -z(\bar{z}^2-1)$$

$$(z\bar{z}-1)(z+\bar{z})=0 \quad \text{よって} \quad z\bar{z}-1=0 \quad \text{または} \quad z+\bar{z}=0$$

$z\bar{z}-1=0$ は $|z|^2=1$ から $|z|=1$ すなわち z は単位円周上にある。

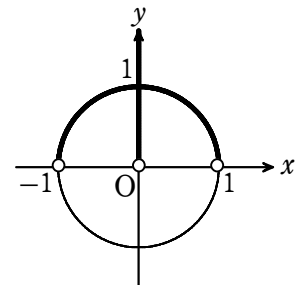
$z+\bar{z}=0$ は z が虚軸上にあることを表す。

条件(I)を合わせて、求める z 全体の集合 S は単位円および虚軸、ただし、いずれも実軸より上の部分である。(右図太線)

複素数 z について

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow z \text{ は実数}$$

$$z = -\bar{z} \Leftrightarrow z \text{ は } 0 \text{ または 準虚数}$$



(3) z の虚部は正であるから、(1)より $w = \frac{1}{z-1}$ の虚部は負である。

$$w = \frac{1}{z-1} \quad \text{から} \quad z-1 = \frac{1}{w} \quad \text{よって} \quad z = \frac{w+1}{w}$$

$|z|=1$ のとき $\left| \frac{w+1}{w} \right| = 1$ から $|w+1|=|w|$, w は点 -1 と原点から等距離。 w は、

この2点を結ぶ線分の垂直二等分線で実軸より下の部分(i)を動く。(右図)

$$z + \bar{z} = 0 \quad \text{のとき} \quad \frac{w+1}{w} + \frac{\bar{w}+1}{\bar{w}} = 0 \quad \text{から} \quad 2w\bar{w} + w + \bar{w} = 0$$

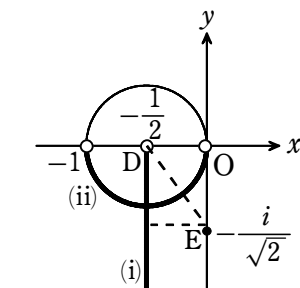
$$\left(w + \frac{1}{2} \right) \left(\bar{w} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} \quad \text{から} \quad \left| w + \frac{1}{2} \right|^2 = \frac{1}{4} \quad \text{よって} \quad \left| w + \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

w は、中心 $D\left(-\frac{1}{2}\right)$, 半径 $\frac{1}{2}$ の円の实軸より下の部分(ii)を動く。

$\left| w + \frac{i}{\sqrt{2}} \right|$ は点 w と点 $E\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$ の距離を表す。

$$E \text{ と (i) の最短距離は } \frac{1}{2}, \quad E \text{ と (ii) の最短距離は } DE - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\frac{1}{2} > \frac{\sqrt{3}-1}{2} \quad \text{であるから 求める最小値は } \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$



$$\left| \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2} > 0 \right.$$

4 a は正の実数とする. 複素数 z が $|z-1|=a$ かつ $z \neq \frac{1}{2}$ を満たしながら動くとき, 複素数平面上の点

$w = \frac{z-3}{1-2z}$ が描く図形を K とする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) K が円となるための a の条件を求めよ. また, そのとき K の中心が表す複素数と K の半径を, それぞれ a を用いて表せ.
 (2) a が (1) の条件を満たしながら動くとき, 虚軸に平行で円 K の直径となる線分が通過する領域を複素数平面上に図示せよ.

(1) $w = \frac{z-3}{1-2z}$ から $(2w+1)z = w+3$, $w = -\frac{1}{2}$ は上の式を満たさないから $w \neq -\frac{1}{2}$ としてよい.

$$z = \frac{w+3}{2w+1} \quad \text{から} \quad z-1 = \frac{-w+2}{2w+1}, \quad |z-1|=a \quad \text{を用いて} \quad \left| \frac{-w+2}{2w+1} \right| = a$$

$$\text{よって} \quad |w-2| = 2a \left| w + \frac{1}{2} \right| \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \quad \leftarrow \begin{array}{l} 2a \neq 1 \text{ のとき} \\ \text{アポロニウスの円} \end{array}$$

$a = \frac{1}{2}$ のとき, 点 w は, 点 2 と点 $-\frac{1}{2}$ を結ぶ線分の垂直二等分線を描く. K は円とならないから $a \neq \frac{1}{2}$

$$\textcircled{1} \text{ より} \quad |w-2|^2 = 4a^2 \left| w + \frac{1}{2} \right|^2, \quad (w-2)(\bar{w}-2) = 4a^2 \left(w + \frac{1}{2} \right) \left(\bar{w} + \frac{1}{2} \right)$$

$$(4a^2-1)w\bar{w} + (2a^2+2)w + (2a^2+2)\bar{w} + (a^2-4) = 0$$

$$\bar{w}\bar{w} + \frac{2a^2+2}{4a^2-1}w + \frac{2a^2+2}{4a^2-1}\bar{w} + \frac{a^2-4}{4a^2-1} = 0 \quad \text{から} \quad \left(w + \frac{2a^2+2}{4a^2-1} \right) \left(\bar{w} + \frac{2a^2+2}{4a^2-1} \right) = \frac{25a^2}{(4a^2-1)^2}$$

$$\left| w + \frac{2a^2+2}{4a^2-1} \right|^2 = \frac{25a^2}{(4a^2-1)^2} \quad \text{よって} \quad \left| w + \frac{2a^2+2}{4a^2-1} \right| = \frac{5a}{|4a^2-1|}$$

K が円となるための条件は $a > 0$, $a \neq \frac{1}{2}$, 中心は $-\frac{2a^2+2}{4a^2-1}$, 半径は $\frac{5a}{|4a^2-1|}$

(2) 虚軸に平行で円 K の直径となる線分を PQ (P が実軸より上) とすると $P \left(-\frac{2a^2+2}{4a^2-1} + \frac{5a}{|4a^2-1|}i \right)$

$$X, Y \text{ を実数として } P(X+Yi) \text{ とすると } X = -\frac{2a^2+2}{4a^2-1}, Y = \frac{5a}{|4a^2-1|} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$a > 0$, $a \neq \frac{1}{2}$ の範囲で a が動くとき, $Y > 0$, $\textcircled{2}$ から a を消去して P の軌跡を求める. $a^2 - \frac{1}{4} = A$ と略記.

$$X = -\frac{1}{2} \cdot \frac{a^2+1}{A} = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{A} \right) \quad \text{から} \quad X + \frac{1}{2} = -\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{A} \quad \text{よって} \quad \frac{4}{5} \left(X + \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{A}$$

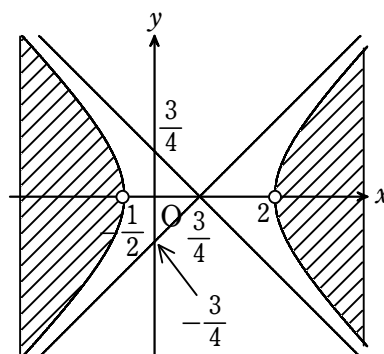
$$Y = \frac{5}{4} \cdot \frac{a}{|A|} \quad \text{から} \quad \frac{4}{5} Y = \frac{a}{|A|},$$

$$\left(\frac{4}{5} Y \right)^2 - \left\{ \frac{4}{5} \left(X + \frac{1}{2} \right) \right\}^2 = \frac{a^2 - \frac{1}{4}}{A^2} = \frac{1}{A} = -\frac{8}{5} \left(X + \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{よって} \quad \left(X - \frac{3}{4} \right)^2 - Y^2 = \left(\frac{5}{4} \right)^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

P は直角双曲線 $\textcircled{3}$ の $Y > 0$ の部分を描く.

Q は実軸に関して P と対称, PQ の通過領域は右図斜線部分.



Oを除く