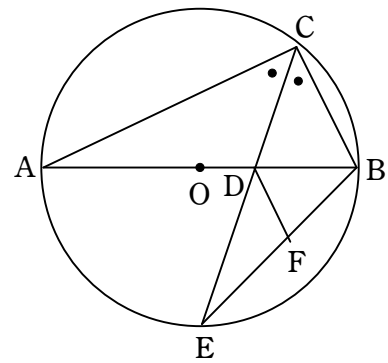


4

2 図のように、線分 AB を直径とする円 O の円周上に点 C をとり、 $\triangle ABC$ をつくる。 $\angle C$ の二等分線と辺 AB との交点を D とする。線分 CD を延長した直線と円 O との交点を E とし、線分 BE 上に $CB \parallel DF$ となる点 F をとる。

$AC=6$ cm, $BC=3$ cm のとき、 $\triangle DEF$ の面積を求めなさい。

(改題)



略解

AB は円 O の直径だから $\angle ACB = \angle AEB = 90^\circ$

$\angle ACD = \angle BCD = 45^\circ$ から $\angle AOE = \angle BOE = 90^\circ$

$AC=6$, $BC=3$ のとき $AB = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$ これから

$$OA = OB = OE = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

CD は $\angle C$ の二等分線だから $AD : DB = AC : BC = 2 : 1$

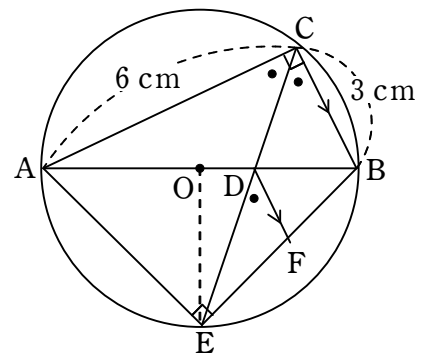
$\triangle CAB$ と $\triangle EAB$ は AB が共通だから、面積比から

$$CD : DE = \triangle CAB : \triangle EAB = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 : \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2} = 9 : \frac{45}{4} = 4 : 5 \quad \dots\dots(*)$$

$$\text{四角形} CAEB = \triangle CAB + \triangle EAB = 9 + \frac{45}{4} = \frac{81}{4} \quad \text{から} \quad \triangle CEB = \frac{81}{4} \times \frac{DB}{AB} = \frac{27}{4}$$

$\triangle DEF$ と $\triangle CEB$ は相似で、相似比は $DE : CE = 5 : 9$ だから

$$\triangle DEF = \frac{27}{4} \times \left(\frac{5}{9}\right)^2 = \frac{25}{12} \quad (\text{cm}^2) \quad \dots\dots(\text{答})$$



感想 元の問題は $\triangle BCD \sim \triangle DBF$ の証明と DB の長さを求めることが誘導になっています。

それも面白いですが、面積比から (*) が求まることに気付くと効率的です。