

[ I ] (2)

問題  $i$  を虚数単位とする。実数  $t$  に対して、複素数  $z$  に関する方程式

$$|3z + it| = |(t + 2i)z - 1|$$

の解  $z$  全体が複素数平面上で表す図形を  $C_t$  とする。 $C_t$  が円でないのは  $t^2 = \boxed{\text{カ}}$  のときである。 $C_t$  が円であるとき、その中心を表す複素数を  $w$  とし、 $w$  の偏角を  $\theta$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ) で表す。 $w$  の虚部が  $0$  となるのは  $t = \boxed{\text{キ}}$  のときであり、このときの  $w$  の実部の値は  $\boxed{\text{ク}}$  である。また、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \tan \theta = \boxed{\text{ケ}}$  であり、 $\lim_{t \rightarrow \infty} t|w| = \boxed{\text{コ}}$  である。

解説・略解  $z = x + yi$  とおいて、 $xy$  平面上での円の方程式を求めるのが通常だろうが、次のように方程式の図形的な意味を考慮すると、計算が容易になると思われる。

複素数平面上で、動点  $P(z)$  の 2 定点  $A(\alpha)$ ,  $B(\beta)$  からの距離の比を  $m : n$  とすると

$$n|z - \alpha| = m|z - \beta| \quad (m > 0, n > 0)$$

であるが、 $P$  の軌跡は、 $m = n$  のとき線分  $AB$  の垂直二等分線、 $m \neq n$  のとき円となる。

いま  $AB$  を  $m : n$  の比に内分する点を  $D(z_1)$ 、外分する点を  $E(z_2)$  とすると、 $P$  は  $DE$  を直径とする円 (アポロニウスの円) を描く。

$$z_1 = \frac{n\alpha + m\beta}{m + n}, \quad z_2 = \frac{-n\alpha + m\beta}{m - n}$$

から円の中心  $C(w)$  は

$$w = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{-n^2\alpha + m^2\beta}{m^2 - n^2}$$

となる。また

$$z_2 - z_1 = \frac{2mn(\beta - \alpha)}{m^2 - n^2}$$

から円の半径は

$$\frac{|z_2 - z_1|}{2} = \frac{mn|\beta - \alpha|}{|m^2 - n^2|}$$

この問題の方程式は

$$|3z + it| = |(t + 2i)z - 1| \quad \text{から} \quad 3 \left| z - \left(-\frac{t}{3}i\right) \right| = |t + 2i| \left| z - \frac{1}{t + 2i} \right|$$

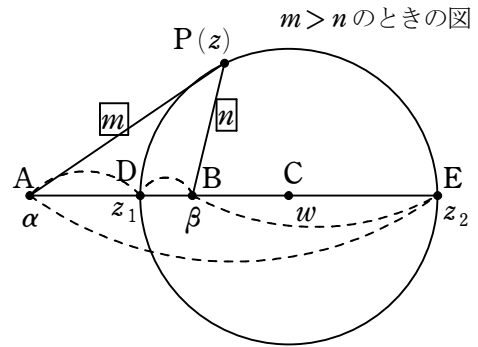
$n = 3$ ,  $m = |t + 2i|$ ,  $\alpha = -\frac{t}{3}i$ ,  $\beta = \frac{1}{t + 2i} = \frac{t - 2i}{t^2 + 4}$  とし、上を用いると

$C_t$  が円でないのは  $3 = |t + 2i|$  すなわち  $9 = t^2 + 4$  よって  $t^2 = 5$  ...カ

円るとき  $n^2 = 9$ ,  $m^2 = t^2 + 4$  から  $w = \frac{t + (3t - 2)i}{t^2 - 5}$ ,  $\tan \theta = \frac{3t - 2}{t}$ ,  $|w| = \frac{\sqrt{10t^2 - 12t + 4}}{|t^2 - 5|}$

$w$  の虚部が  $0$  となるのは  $t = \frac{2}{3}$  ...キ このときの  $w$  の実部の値は  $-\frac{6}{41}$  ...ク

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tan \theta = 3 \quad \dots \text{ケ} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t|w| = \sqrt{10} \quad \dots \text{コ}$$



計算して確かめてください。

C は AB を  $m^2 : n^2$  の比に外分する点と覚えるとよい。

$$DB = \frac{n}{m+n} AB, \quad BE = \frac{n}{m-n} AB$$

から導くこともできる。