

第 1 問

$$(1) \int_3^5 (x-3)^3(5-x)^5 dx = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}} \text{ である。}$$

解説・解答

$5-x=t$ などにおいて置換積分を用いることもできるが、分数計算が面倒になることが予想できる。この形の定積分では、一種の漸化式を使うとよい。 m, n を負でない整数として

$$I(m, n) = \int_3^5 (x-3)^m (5-x)^n dx$$

とおき、部分積分を用いると

$$\begin{aligned} I(m, n) &= \left[(x-3)^m \cdot \frac{(-1)}{n+1} (5-x)^{n+1} \right]_3^5 - \int_3^5 m(x-3)^{m-1} \cdot \frac{(-1)}{n+1} (5-x)^{n+1} dx \\ &= \frac{m}{n+1} I(m-1, n+1) \end{aligned}$$

これを繰り返し使うと

$$I(3, 5) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{8} I(0, 8)$$

$$\text{ここで } I(0, 8) = \int_3^5 (5-x)^8 dx = \left[\frac{(-1)}{9} (5-x)^9 \right]_3^5 = \frac{2^9}{9}$$

$$\text{与式} = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{2^9}{9} = \frac{64}{63} \quad \dots \text{答}$$

一般に、 m, n を負でない整数として

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m (\beta-x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} (\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

という公式がなりたつ。(第 1 種オイラー積分) 上と同様にして証明できる。