

第5問

- (1) 関数 $y = \frac{x}{x^2+1}$ の増減, 極値, グラフの凹凸および変曲点を調べて, そのグラフを描け。
- (2) k を自然数とする。曲線 $y = \frac{x}{x^2+1}$ と x 軸および2直線 $x = k, x = k+1$ で囲まれた図形の面積を k を用いて表せ。
- (3) 無限級数

$$\frac{1}{1^2+1} + \frac{2}{2^2+1} + \frac{3}{3^2+1} + \dots + \frac{n}{n^2+1} + \dots$$

の収束, 発散を調べよ。

解説・略解

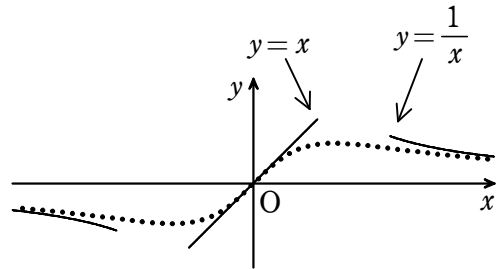
グラフの概形は式だけからでもわかる。 $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ とすると $f(-x) = -f(x)$ だから

グラフは原点对称。分母の x^2+1 について
 原点の近く ($|x| \ll 1$ と表す) では1に対し x^2

は無視できるから $\frac{x}{x^2+1} \doteq x$, 原点から離

れると ($|x| \gg 1$) $\frac{x}{x^2+1} \doteq \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$

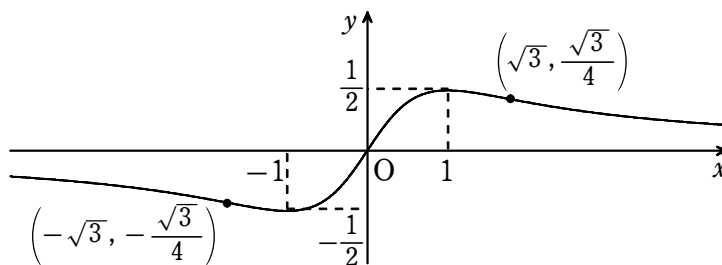
グラフは右図の点線のようにになると予想される。



- (1) $y' = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$, $y'' = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$, 極小値は $f(-1) = -\frac{1}{2}$, 極大値は $f(1) = \frac{1}{2}$

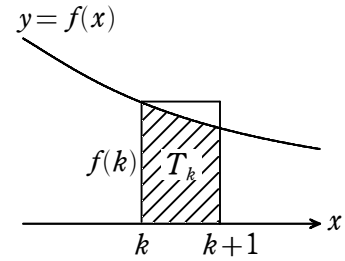
変曲点は $(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4})$, $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4})$

x	...	$-\sqrt{3}$...	-1	...	0	...	1	...	$\sqrt{3}$...
y'	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-
y''	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
y	↘	変曲点	↘	極小	↗	変曲点	↗	極大	↘	変曲点	↘



(2) 求める図形の面積を T_k とすると

$$\begin{aligned} T_k &= \int_k^{k+1} \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_k^{k+1} \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\log(x^2+1) \right]_k^{k+1} \\ &= \frac{1}{2} [\log\{(k+1)^2+1\} - \log(k^2+1)] \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{k^2+2k+2}{k^2+1} \end{aligned}$$



(3) k が自然数のとき, $k \leq x \leq k+1$ において $f(x)$ は減少するから

$$T_k < f(k) \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{2} [\log\{(k+1)^2+1\} - \log(k^2+1)] < \frac{k}{k^2+1}$$

$k=1$ から n まで辺々たしあわせると

$$\frac{1}{2} [\log\{(n+1)^2+1\} - \log 2] < \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2+1}$$

ここで $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2+1}$ は与えられた無限級数の初項から第 n 項までの部分和であり

$n \rightarrow \infty$ のとき $\frac{1}{2} [\log\{(n+1)^2+1\} - \log 2] \rightarrow \infty$ であるから $S_n \rightarrow \infty$

すなわち与えられた無限級数は正の無限大に発散する。