

問題 3

(1) 整数の組  $(x, y)$  で条件

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{4}} y < \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \\ 2^{y-1} < 8^x \end{cases}$$

を満たすものは全部で  $\boxed{\text{ヒ}}$  個ある。

(2)  $AB=4, BC=2\sqrt{6}, CA=2\sqrt{3}-2$  の  $\triangle ABC$  がある。

$\angle A$  の二等分線と辺  $BC$  の交点を  $D$  とする。このとき、 $\triangle ABC$  の面積は

$$\boxed{\text{フ}} + \boxed{\text{ヘ}} \sqrt{\boxed{\text{ホ}}}$$

であり、

$$AD = \boxed{\text{マ}} + \boxed{\text{ミ}} \sqrt{\boxed{\text{ム}}}$$

である。

(3) 座標平面において、直線  $y=2x-3$  を、原点を中心に反時計回りに  $45^\circ$  回転して得られる直線は

$$y = \boxed{\text{メ}} + \boxed{\text{モ}} \sqrt{\boxed{\text{ヤ}}}$$

である。

(4) 座標平面上で放物線  $y=x^2$  上の点  $P(t, t^2)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) における接線と放物線  $y=-(x+1)^2$  の2つの共有点の中点を  $Q$  とする。ただし、共有点が1つの場合は、その共有点を  $Q$  とする。

$Q$  の座標は

$$\left( \boxed{\text{ニ}}t + \boxed{\text{ヨ}}, \boxed{\text{ラ}}t^2 + \boxed{\text{リ}}t + \boxed{\text{ル}} \right)$$

である。 $t$  が  $0 \leq t \leq 1$  の範囲を動くとき線分  $PQ$  が動いてできる図形の面積は

$$\frac{\boxed{\text{レ}}}{\boxed{\text{ロ}}}$$

である。

解説・略解

$$(1) \begin{cases} \log_{\frac{1}{4}} y < \log_{\frac{1}{2}}(x-1) & \dots\dots ① \\ 2^{y-1} < 8^x & \dots\dots ② \end{cases}$$

① の真数条件から  $y > 0, x-1 > 0$   $\dots\dots ③$ , 底を  $\frac{1}{2}$  に変換して

$$\frac{\log_{\frac{1}{2}} y}{\log_{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{2} \right)^2} < \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \quad \text{から} \quad \log_{\frac{1}{2}} y < \log_{\frac{1}{2}}(x-1)^2$$

底の  $\frac{1}{2} < 1$  に注意すると  $y > (x-1)^2$  ……④

② から  $2^{y-1} < 2^{3x}$  よって  $y < 3x+1$  ……⑤

③, ④, ⑤ を満たすのは右図の斜線部分 (境界は除く) で

$$1 < x < 5, (x-1)^2 < y < 3x+1$$

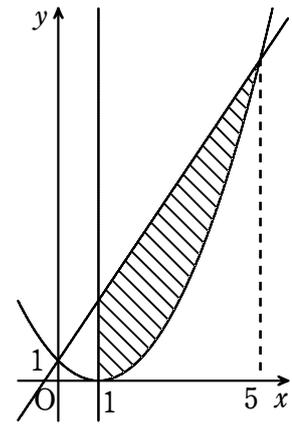
この部分の格子点の個数を求めればよい。

$$x=2 \text{ のとき } 1 < y < 7 \quad 5 \text{ 個}$$

$$x=3 \text{ のとき } 4 < y < 10 \quad 5 \text{ 個}$$

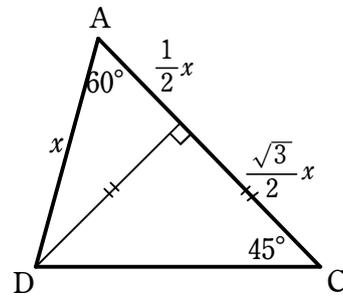
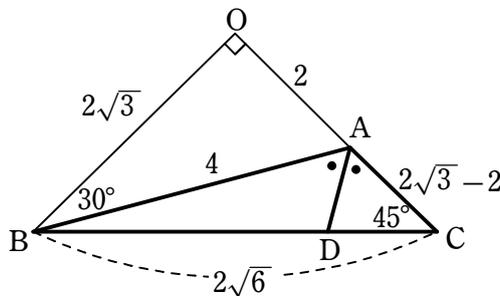
$$x=4 \text{ のとき } 9 < y < 13 \quad 3 \text{ 個}$$

求める整数の組  $(x, y)$  の個数は 13 個である。



(2) 辺の長さに現れる数値に注目して、三角定規を組み合わせた図形に気付くと計算が楽

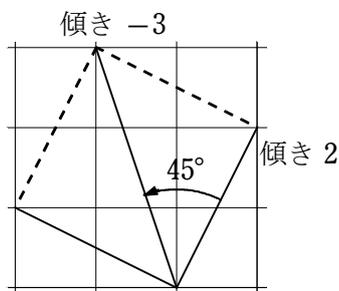
$$4 : 2\sqrt{3} : 2 \rightarrow 2 : \sqrt{3} : 1, \quad 2\sqrt{6} : 2\sqrt{3} \rightarrow \sqrt{2} : 1$$



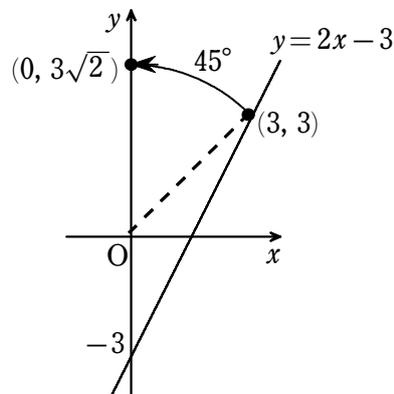
$$\triangle ABC = \frac{1}{2} CA \cdot BO = \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{3} - 2) \cdot 2\sqrt{3} = 6 - 2\sqrt{3}$$

$$AD = x \text{ とすると } \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}x = 2\sqrt{3} - 2 \text{ から } x = 2(\sqrt{3} - 1)^2 = 8 - 4\sqrt{3}$$

(3) 傾き 2 の  $45^\circ$  回転と直線上の点  $(3, 3)$  に気付くと計算が楽



$$\text{求める直線は } y = -3x + 3\sqrt{2}$$



(4)  $P(t, t^2)$  における接線は

$$y - t^2 = 2t(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = 2tx - t^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

これと  $y = -(x+1)^2$  の共有点の  $x$  座標は

$$2tx - t^2 = -(x+1)^2$$

$$x^2 + 2(t+1)x - t^2 + 1 = 0$$

の実数解, これは  $0 \leq t \leq 1$  のとき, 実数解をもつので

これらを  $\alpha, \beta$  とすると解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = -2(t+1)$$

2つの共有点の中点を  $Q(X, Y)$  とすると

$$X = \frac{\alpha + \beta}{2} = -t - 1, \quad Y = 2tX - t^2 = -3t^2 - 2t$$

これらから  $t$  を消去すると  $0 \leq t \leq 1$  も考慮して

$$Y = -3X^2 - 4X - 1 \quad (-2 \leq X \leq -1)$$

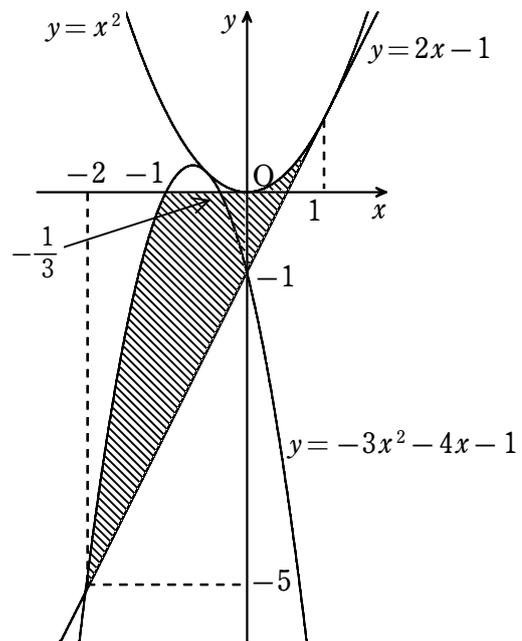
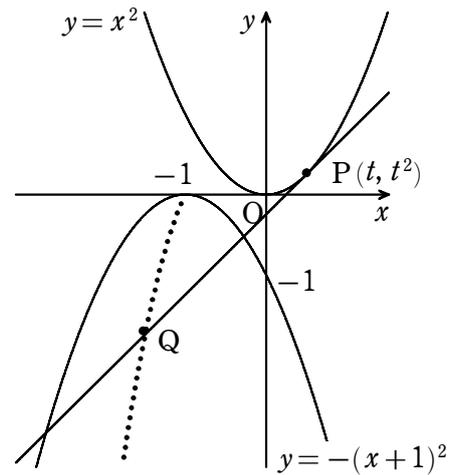
$t$  が  $0 \leq t \leq 1$  の範囲を動くとき

$Q$  は曲線  $y = -3x^2 - 4x - 1$  上を点  $(-1, 0)$

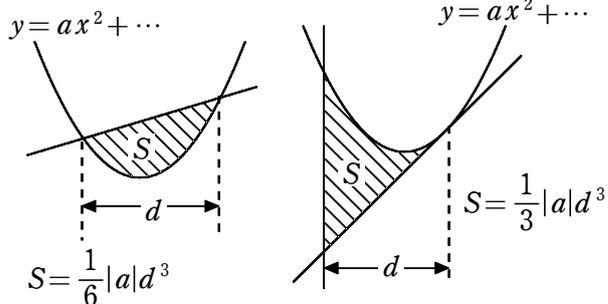
から点  $(-2, -5)$  まで動き,  $P$  は  $y = x^2$  上を

原点  $O$  から点  $(1, 1)$  まで動く。PQ が動いて

できる図形は右図の斜線部分。



放物線と直線で囲まれた図形の面積は公式を用いると楽



求める面積は

$$\frac{1}{2} + \frac{7}{2} + \frac{1}{3} = \frac{13}{3}$$

$$\frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 1^3 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} \cdot 1^3 = \frac{1}{3}$$

四角形

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{7}{2}$$

