

問題 I

**キ** の解答は該当する解答群の中から最も適当なものを一つ選べ。

原点を  $O$  とする座標平面上に円  $C : x^2 + y^2 = 10$  と直線  $l : y = ax - 4a + 2$  がある。ただし、 $a$  は実数の定数とする。

(a) 直線  $l$  は、その傾き  $a$  の値によらず、定点  $F$  (**ア**, **イ**) を通る。

定数  $a$  を変化させたとき、円  $C$  と接するような直線  $l$  は 2 本存在する。これらの直線と円  $C$  との

接点を  $P, Q$  とすると、短い方の弧  $PQ$  の長さは  $\frac{\sqrt{\text{ウエ}}}{\text{オ}} \pi$  である。

(b) 直線  $l$  が円  $C$  と異なる 2 点で交わるとき、その交点を  $R, S$  とする。

線分  $RS$  の中点を  $M$  とすると、 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{FM} = \text{カ}$  が成り立つ。定数  $a$  を変化させたとき、点  $M$  が描く軌跡は原点  $O$  を通り **キ** の一部である。

また、定数  $a$  を変化させた場合に  $\triangle ORS$  の面積が最大となるのは、原点と直線  $l$  の距離が

$\sqrt{\text{ク}}$  であり、 $a = \frac{\text{ケ} \pm \text{コ} \sqrt{\text{サ}}}{\text{シス}}$  のときである。

**キ** の解答群

- ① 点  $F$  を焦点とする放物線
- ② 点  $F$  を中心とする円
- ③ 線分  $FO$  を直径とする円
- ④ 線分  $FO$  を一辺にもつ正三角形の外接円
- ⑤ 点  $F$  を焦点の 1 つとする楕円
- ⑥ 線分  $FO$  を長軸とする楕円
- ⑦ 点  $F$  を焦点の 1 つとする双曲線
- ⑧ 2 点  $F, O$  を頂点とする双曲線

(c) 点  $T(u, v)$  を直線  $l$  と楕円  $E : \frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{4} = 1$  の共有点とする。

$\vec{\alpha} = \left( \frac{u}{\sqrt{10}}, \frac{v}{2} \right)$ ,  $\vec{\beta} = (a\sqrt{10}, -2)$  とおくと、点  $T$  が直線  $l$  上にあることから

$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \text{セ} a - \text{ソ}$  が成立する。また、点  $T$  が楕円  $E$  上にあることから

$|\vec{\alpha}| = \text{タ}$  がいえる。

$-|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \leq \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \leq |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|$  より、直線  $l$  と楕円  $E$  が共有点をもつ  $a$  の範囲は

$\text{チ} \leq a \leq \frac{\text{ツ}}{\text{テ}}$  とわかる。

$a = \text{チ}$  のとき、直線  $l$  は楕円  $E$  と点 (**ト**, **ナ**) で接し、直線  $l$  が円  $C$  によって切り

取られる線分  $RS$  の長さは  $\text{ニ} \sqrt{\text{ヌ}}$  である。

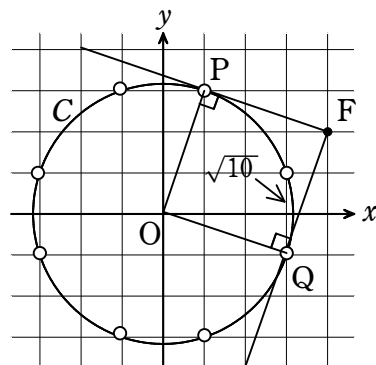
解説・略解

(a)

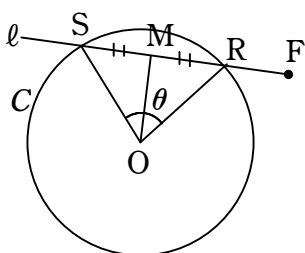
円  $C$  は半径  $\sqrt{10}$  だから点  $(3, 1)$  のような格子点を通る。  
これを利用すると図から答えは自然とわかる。

直線  $\ell$  は  $y-2=a(x-4)$  となるから、定点  $F(4, 2)$  を通り傾き  $a$  の直線である。四角形  $FPOQ$  は1辺の長さ  $\sqrt{10}$  の正方形、弧  $PQ$  に対する中心角は  $90^\circ$  だからその長さは

$$2\pi \times \sqrt{10} \times \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{10}}{2}\pi$$



(b)



円の中心と弦の中点を結ぶ線分はその弦に垂直だから

$$\vec{OM} \cdot \vec{FM} = 0$$

定数  $a$  を変化させたときもつねに  $\angle OMF = 90^\circ$  だから、

点  $M$  が描く軌跡は原点  $O$  を通り「線分  $FO$  を直径とする円」の一部である。

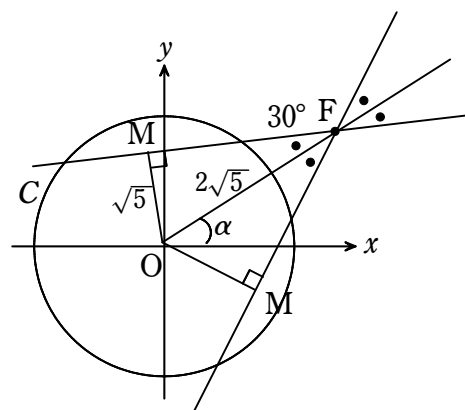
また、 $\angle ROS = \theta$  とすると、 $\triangle ORS$  の面積は

$$\triangle ORS = \frac{1}{2}(\sqrt{10})^2 \sin \theta$$

だから  $\theta = 90^\circ$  のとき最大となり、このとき原点と直線  $\ell$  の距離は

$$OM = \sqrt{10} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{5}$$

このときの傾き  $a$  は距離の公式を用いて求めるのが自然だろうが、せっかく  $1:2:\sqrt{3}$  の直角三角形があるのでそれを利用した解法もある。



$OF = 2\sqrt{5}$  だから  $\triangle OFM$  は  $\angle OFM = 30^\circ$  の直角三角形。

$OF$  と  $x$  軸のなす角を  $\alpha$  とすると、 $OF$  の傾きは  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ 、求める  $\ell$  の傾きは

$$\begin{aligned} \tan(\alpha \pm 30^\circ) &= \frac{\tan \alpha \pm \tan 30^\circ}{1 \mp \tan \alpha \tan 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 \mp \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} \pm 2}{2\sqrt{3} \mp 1} \\ &= \frac{(\sqrt{3} \pm 2)(2\sqrt{3} \pm 1)}{11} = \frac{8 \pm 5\sqrt{3}}{11} \end{aligned}$$

(c)  $T(u, v)$  は直線  $l$  と楕円  $E$  の上にあるから

$$v = au - 4a + 2 \quad \dots\dots ① \quad \frac{u^2}{10} + \frac{v^2}{4} = 1 \quad \dots\dots ②$$

$\vec{\alpha} = \left( \frac{u}{\sqrt{10}}, \frac{v}{2} \right)$ ,  $\vec{\beta} = (a\sqrt{10}, -2)$  のとき ① から

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} &= \frac{u}{\sqrt{10}} \cdot a\sqrt{10} + \frac{v}{2} \cdot (-2) = au - v \\ &= au - (au - 4a + 2) = 4a - 2 \end{aligned}$$

② から  $|\vec{\alpha}| = \sqrt{\frac{u^2}{10} + \frac{v^2}{4}} = 1$  また  $|\vec{\beta}| = \sqrt{10a^2 + 4}$

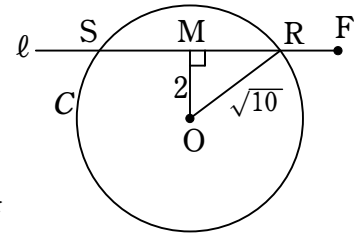
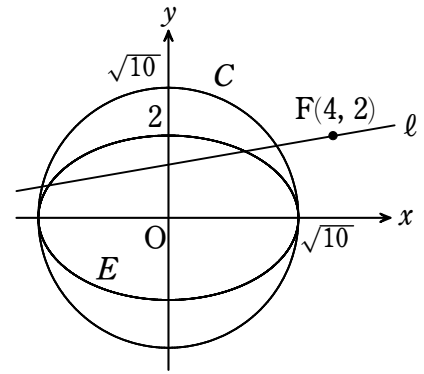
$-|\vec{\alpha}||\vec{\beta}| \leq \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \leq |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$  から  $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$

$|4a - 2| \leq \sqrt{10a^2 + 4}$  両辺平方して  $(4a - 2)^2 \leq 10a^2 + 4$

$6a^2 - 16a \leq 0$  から  $2a(3a - 8) \leq 0$  したがって  $0 \leq a \leq \frac{8}{3}$

$a = 0$  のとき,  $l$  は  $y = 2$  だから楕円  $E$  と点  $(0, 2)$  で接する。このとき

$$RS = 2 RM = 2\sqrt{10 - 4} = 2\sqrt{6}$$



**考察**

(c) は誘導に従って計算すれば, 解答はそれほど難しくはないのですが, 筆者は次の疑問を持ちました。

(1)  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  とは何だろうか

(2) 直線と楕円が交わるという特別な条件なのに, 内接の性質の  $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$  でいいのか  
これが主な疑問です。おそらく, 楕円と直線を座標変換して円と直線の問題に書き直して考えればよいと思い  $X = \frac{u}{\sqrt{10}}$ ,  $Y = \frac{v}{2}$  とおくと ①, ② は  $\leftarrow \begin{cases} x \text{ 方向は } \frac{1}{\sqrt{10}}, y \text{ 方向は } \frac{1}{2} \text{ に縮小} \end{cases}$

$$Y = \frac{\sqrt{10}}{2} a \left( X - \frac{4}{\sqrt{10}} \right) + 1 \quad \text{から} \quad \sqrt{10} a X - 2Y - 4a + 2 = 0 \quad \dots\dots ①'$$

$$X^2 + Y^2 = 1 \quad \dots\dots ②'$$

①' を直線  $l'$ , ②' を円  $C'$ ,  $l'$  は定点  $F' \left( \frac{4}{\sqrt{10}}, 1 \right)$  を通る。

これから  $\vec{\alpha} = (X, Y)$  は円  $C'$  上の共有点の位置ベクトル,  
 $\vec{\beta} = (a\sqrt{10}, -2)$  は直線  $l'$  の法線ベクトルといえる。

法線ベクトルと平行な単位ベクトル  $\frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}$  への  $\vec{\alpha}$  の正射影の大きさ

$\frac{|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}|}{|\vec{\beta}|}$  は O と  $l'$  の距離を表すから,  $l'$  と  $C'$  が共有点をもつ条件は  $\frac{|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}|}{|\vec{\beta}|} \leq |\vec{\alpha}|$  すなわち

$|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$  となっている。よって, この条件を用いるのは問題ないのでしょう。

ただ疑問 (2) については, まだよく分からないところがあります。こだわる必要はないのでしょうか。

