

3次関数 東北医科薬科大学 (2024)

問題

[I] 座標平面上の3次曲線 $y=f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c は定数) が, 次の2つの条件

(i), (ii) を満たすとする。

(i) $x=p$ で極小値 1 をとり, $x=q$ で極大値をとる。

(ii) $y=f(x)$ の変曲点 $(r, f(r))$ の y 座標は $f(r)=3$ である。

このとき, 以下の問に答えなさい。

(1)(1-1) $q = -\frac{\text{ア}a + \text{イ}p}{\text{ウ}}$, 極大値は $f(q) = \text{エ}$ である。

(1-2) $y=f(x)$ と直線 $y=1$ で囲まれた図形の面積は $\frac{\text{オカ}}{\text{キ}}$ である。

(2) 2点 $(p, 1), (q, f(q))$ を通る直線を ℓ とおく。

(2-1) ℓ の傾きは クケ である。

(2-2) ℓ が点 $(3, -9)$ を通るとき, $p = \text{コサ}$, $a = \text{シ}$ である。

解説・略解

(1) 極値をもつ3次関数のグラフは右のようになる。

(2行4列の等分割の枠に典型的な5点が収まる)

$f'(x)=3x^2+2ax+b=0$ の異なる2つの実数解が p, q であるから, 解と係数の関係から

$$p+q = -\frac{2a}{3} \quad \text{よって} \quad q = -\frac{2a+3p}{3}$$

グラフは変曲点 $(r, f(r))$ に関して対称だから極大値は $f(q)=5$

$$f(q)-f(p) = \frac{1}{2}(p-q)^3 = 4 \quad \text{から} \quad p-q=2 \quad \dots\dots(*)$$

面積 S は $S = \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 3^4 = \frac{27}{4} \quad \dots\dots(**)$

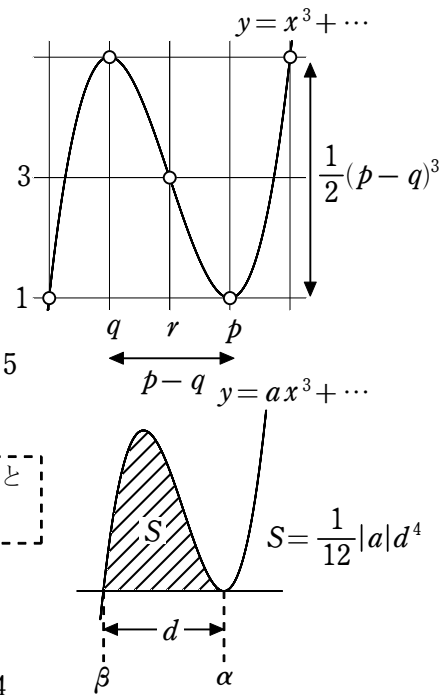
これを知らないと
難しい

(2) ℓ の傾きは -2 , ℓ は点 $(3, -9)$ を通るから

$$y+9 = -2(x-3) \quad \text{すなわち} \quad y = -2x-3$$

ℓ は点 $(p, 1)$ を通るから $1 = -2p-3$ よって $p = -2, q = -4$

$$-\frac{2a}{3} = -2-4 \quad \text{よって} \quad a = 9$$



(*) について

$$f(p)-f(q) = \int_q^p f'(x)dx = \int_q^p 3(x-p)(x-q)dx = 3 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) (p-q)^3 = -\frac{1}{2}(p-q)^3$$

← 1/6 公式

(**) について

$$S = \int_{\beta}^{\alpha} a(x-\alpha)^2(x-\beta)dx = a \int_{\beta}^{\alpha} (x-\alpha)^2 \{(x-\alpha) - (\beta-\alpha)\} dx = a \int_{\beta}^{\alpha} \{(x-\alpha)^3 - (\beta-\alpha)(x-\alpha)^2\} dx$$

$$= a \left[\frac{1}{4}(x-\alpha)^4 - (\beta-\alpha) \cdot \frac{1}{3}(x-\alpha)^3 \right]_{\beta}^{\alpha} = a \cdot \frac{1}{12} (\beta-\alpha)^4 \quad \rightarrow \frac{1}{12} \text{公式} \quad \frac{1}{12} \text{は} \frac{1}{3} \text{と} \frac{1}{4} \text{の差からくる}$$

問題

③ xy 平面において、曲線 $y=x^4-4x^2+4x+2$ を ①、曲線 ① と異なる 2 点で接する直線を ②、直線 ② と平行で曲線 ① にただ 1 点で接する直線を ③ とする。次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入すること。

- (1) 直線 ② の方程式を求めよ。
- (2) 直線 ③ の方程式を求めよ。
- (3) 曲線 ① と直線 ② で囲まれた面積 S_1 を求めよ。
- (4) 曲線 ① と直線 ③ で囲まれたすべての部分の面積の和 S_2 を求めよ。
- (5) $f(x)=x^4-4x^2+4x+2$ は、 $x=\alpha, \beta (\alpha \neq \beta)$ で極小値をとり、 $x=r$ で極大値をとるものとする。3 点 $(\alpha, f(\alpha)), (\beta, f(\beta)), (r, f(r))$ をすべて通り、軸が y 軸に平行な放物線の方程式を求めよ。

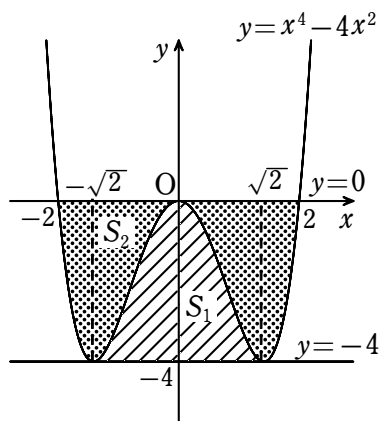
解説・略解

曲線 ① を $y=x^4-4x^2$ と $y=4x+2$ の関数の和とみなす。

$$f_1(x)=x^4-4x^2=x^2(x-2)(x+2) \text{ とすると}$$

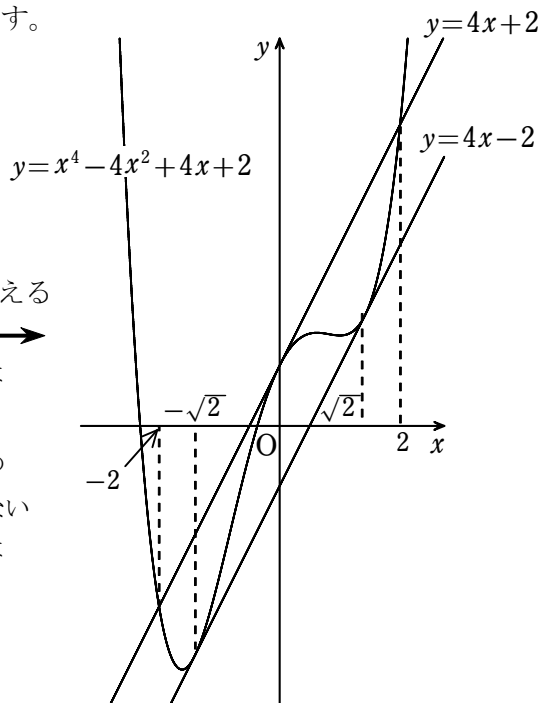
$$f_1'(x)=4x^3-8x=4x(x^2-2)$$

から $y=f_1(x)$ のグラフは下図。



$y=4x+2$ を加える

接点の x 座標は
変わらない
囲まれた部分の
面積も変わらない
極値の x 座標は
ずれる



② は $y=4x-2$, ③ は $y=4x+2$

$$S_1 = 2 \int_0^{\sqrt{2}} \{x^4 - 4x^2 - (-4)\} dx = 2 \left[\frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3} + 4x \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{2}{15} \left[x(3x^4 - 20x^2 + 60) \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{64\sqrt{2}}{15}$$

$$S_2 = 2 \int_0^2 \{-(x^4 - 4x^2)\} dx = 2 \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{4x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{128}{15}$$

$f'(x)=4x^3-8x+4$ であり α, β, r は $f'(x)=0$ の異なる 3 つの解だから $f'(\alpha)=f'(\beta)=f'(r)=0$

$f(x)$ を $f'(x)$ で割った商と余りを用いると $f(x)=\frac{1}{4}xf'(x)-2x^2+3x+2$ これから

$$f(\alpha)=-2\alpha^2+3\alpha+2, f(\beta)=-2\beta^2+3\beta+2, f(r)=-2r^2+3r+2$$

これは放物線 $y=-2x^2+3x+2$ が異なる極値の 3 点を通ることを表している。

すなわち $y=-2x^2+3x+2$ が求める放物線である。