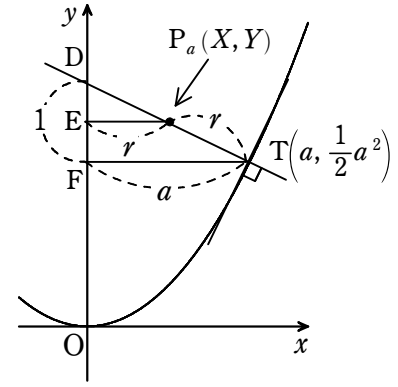


問題 1

xy 平面上の曲線 $y = \frac{1}{2}x^2$ に、点 $(a, \frac{1}{2}a^2)$ ($a > 0$) で接する円のうち、 y 軸の正の部分にも接するものを S_a とおく。 a が正の実数を動くときの S_a の中心の軌跡を C 、とくに S_1 の中心を P とする。

- (1) 点 P の座標を求めよ。
- (2) 点 P における曲線 C の接線の傾きを求めよ。



解説・略解

(1) $y = \frac{1}{2}x^2$ から $y' = x$

$T(a, \frac{1}{2}a^2)$ とし、曲線 $y = \frac{1}{2}x^2$ の T における法線は

$$y - \frac{1}{2}a^2 = -\frac{1}{a}(x - a) \quad \text{から} \quad y = -\frac{1}{a}x + \frac{1}{2}a^2 + 1$$

円 S_a の中心を $P_a(X, Y)$ とすると、 P_a はこの法線上にある。法線と y 軸の交点を D 、 P_a と T から y 軸に引いた垂線の交点をそれぞれ E, F とすると

$$DF = 1, \quad FT = a, \quad DT = \sqrt{a^2 + 1}$$

P_a は点 T と y 軸からの距離が等しいから、円 S_a の半径を r とすると $EP_a = P_aT = r$

$\triangle DEP_a \sim \triangle DFT$ だから $DP_a = r \cdot \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a}$ から $r \cdot \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a} + r = \sqrt{a^2 + 1}$

$$r = \frac{a\sqrt{a^2 + 1}}{\sqrt{a^2 + 1} + a} \quad \text{すなわち} \quad X = \frac{a\sqrt{a^2 + 1}}{\sqrt{a^2 + 1} + a} = a^3 + a - a^2\sqrt{a^2 + 1}$$

$$Y = -\frac{1}{a}X + \frac{1}{2}a^2 + 1 = \frac{1}{2}a^2 + 1 - \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{\sqrt{a^2 + 1} + a} = a\sqrt{a^2 + 1} - \frac{1}{2}a^2$$

X, Y をそれぞれ $f(a), g(a)$ とすると、求める P の座標は

$$P(f(1), g(1)) \quad \text{すなわち} \quad P(2 - \sqrt{2}, \sqrt{2} - \frac{1}{2})$$

(2) $f'(a) = 3a^2 + 1 - 2a\sqrt{a^2 + 1} - \frac{a^3}{\sqrt{a^2 + 1}}, \quad g'(a) = \sqrt{a^2 + 1} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + 1}} - a$

曲線 C の接線の傾きは $\frac{dY}{dX} = \frac{\frac{dY}{da}}{\frac{dX}{da}} = \frac{g'(a)}{f'(a)}$

点 P における接線の傾きは $a = 1$ として

$$f'(1) = 4 - \frac{5\sqrt{2}}{2}, \quad g'(1) = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1 \quad \text{から} \quad \frac{g'(1)}{f'(1)} = \frac{3\sqrt{2} - 2}{8 - 5\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1$$

問題 3

xy 平面上に、点 $A(a, 0)$, $B(0, b)$, $C(-a, 0)$ (ただし, $0 < a < b$) をとる。

点 A , B を通る直線を ℓ とし, 点 C を通り線分 BC に垂直な直線を k とする。

さらに, 点 A を通り y 軸に平行な直線と直線 k との交点を C_1 とし, 点 C_1 を通り x 軸に平行な直線と直線 ℓ との交点を A_1 とする。以下, $n=1, 2, 3, \dots$ に対して, 点 A_n を通り y 軸に平行な直線と直線 k との交点を C_{n+1} , 点 C_{n+1} を通り x 軸に平行な直線と直線 ℓ との交点を A_{n+1} とする。

(1) 点 A_n , C_n の座標を求めよ。

(2) $\triangle CBA_n$ の面積 S_n を求めよ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{BA_n}{BC}$ を求めよ。

解説・略解

①と同様, 相似を利用すると計算が簡明になると思われる。

(1) $A_0(a, 0)$, $C_0(-a, 0)$ とし, ℓ 上に点 $A_{-1}(-a, 2b)$ をとる。 $\triangle A_{-1}C_0A_0 \sim \triangle C_0A_0C_1 \sim \triangle A_0C_1A_1$ であり,

相似比は $1 : \frac{a}{b} : \left(\frac{a}{b}\right)^2$ であるから

$$A_0C_1 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 A_{-1}C_0 = \frac{2a^2}{b}$$

同様に $\triangle A_{n-1}C_nA_n \sim \triangle A_nC_{n+1}A_{n+1}$ から

$$A_nC_{n+1} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 A_{n-1}C_n$$

$A_n(x_n, y_n)$ とすると, ℓ の式は $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ であるから

$$\frac{x_n}{a} + \frac{y_n}{b} = 1 \text{ より } x_n = a - \frac{a}{b}y_n, \text{ また } C_n(x_{n-1}, y_n)$$

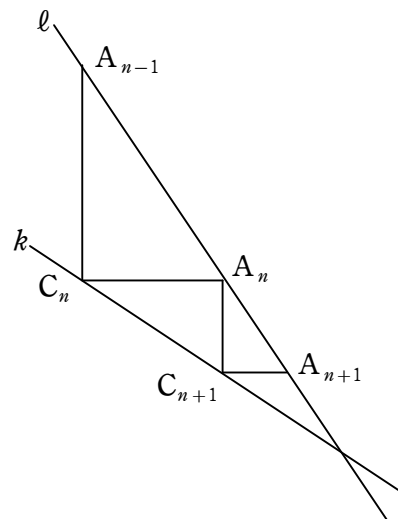
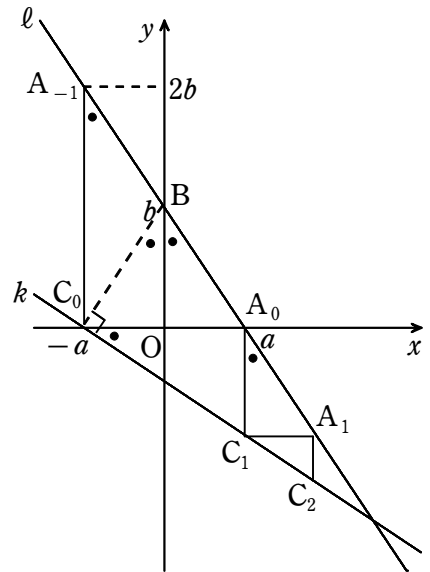
$$y_{n+1} - y_n = \left(\frac{a}{b}\right)^2 (y_n - y_{n-1}), \quad y_1 = -\frac{2a^2}{b}, \quad y_0 = 0$$

から $y_{n+1} - y_n = -\frac{2a^2}{b} \left(\frac{a}{b}\right)^{2n}$ したがって A_n の y 座標, C_n の y 座標は

$$y_n = -\frac{2a^2}{b} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{a}{b}\right)^{2(k-1)} = -\frac{2a^2}{b} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2} \left\{ 1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2n} \right\} = -\frac{2a^2b}{b^2 - a^2} \left\{ 1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2n} \right\}$$

A_n の x 座標は

$$x_n = a - \frac{a}{b}y_n = a + \frac{2a^3}{b^2 - a^2} \left\{ 1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2n} \right\}$$



C_n の x 座標は

$$x_{n-1} = a + \frac{2a^3}{b^2 - a^2} \left\{ 1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2(n-1)} \right\}$$

(2) $\frac{\triangle CBA_n}{\triangle CBA} = \frac{BA_n}{BA} = \frac{b - y_n}{b}$ から

$$\triangle CBA_n = ab \cdot \frac{b - y_n}{b} = ab + \frac{2a^3b}{b^2 - a^2} \left\{ 1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2n} \right\}$$

(3) $\frac{BA_n}{BC} = \frac{b - y_n}{b} = 1 + \frac{2a^2}{b^2 - a^2} \left\{ 1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2n} \right\}$

$n \rightarrow \infty$ のとき $\left(\frac{a}{b} \right)^{2n} \rightarrow 0$ であるから $\frac{BA_n}{BC} \rightarrow 1 + \frac{2a^2}{b^2 - a^2} = \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}$