

問題

4 実数 a, b は $-1 < a < 1, -1 < b < 1$ を満たす。座標空間内に 4 点 $A(a, -1, -1), B(-1, b, -1), C(-a, 1, 1), D(1, -b, 1)$ をとる。

- (1) A, B, C, D がひし形の頂点となるとき、 a と b の関係を表す等式を求めよ。
- (2) a, b が (1) の等式を満たすとき、 A, B, C, D を頂点とする四角形の面積の最小値を求めよ。

解説・略解

(1) 線分 AC, BD の中点が原点 O であるから、四角形 $ABCD$ は平行四辺形である。

さらに、この平行四辺形 $ABCD$ がひし形となるためには $\overrightarrow{OA} = (a, -1, -1)$ と $\overrightarrow{OB} = (-1, b, -1)$ が直交すればよい。すなわち

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -a - b + 1 = 0$$

したがって、求める条件は

$$a + b = 1$$

(2) ひし形 $ABCD$ の面積 S は

$$S = 4 \triangle OAB = 2 \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2\sqrt{a^2 + 2} \sqrt{b^2 + 2} = 2\sqrt{a^2 b^2 + 2(a^2 + b^2) + 4}$$

ここで

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 1 - 2ab \quad \text{から}$$

$$S = 2\sqrt{a^2 b^2 - 4ab + 6} = 2\sqrt{(ab - 2)^2 + 2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$-1 < a < 1, -1 < b < 1$ を用いると

$$b = 1 - a < 1 \quad \text{から} \quad 0 < a \quad \text{同様に} \quad 0 < b$$

相加・相乗平均の大小関係を用いると

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad \text{から} \quad \frac{1}{2} \geq \sqrt{ab} \quad \text{よって} \quad \frac{1}{4} \geq ab > 0$$

① から S は $ab = \frac{1}{4}$ のとき最小となり、最小値は

$$S = 2\sqrt{\left(\frac{1}{4} - 2\right)^2 + 2} = \frac{9}{2}$$

(このとき $a = b = \frac{1}{2}$, $OA = OB = \frac{3}{2}$ であり、ひし形 $ABCD$ は正方形となる)

感想

相加・相乗平均の大小関係や $\sqrt{\quad}$ の中が 2 次関数になるなど、昔 (昭和) 懐かしい感じの問題でした。