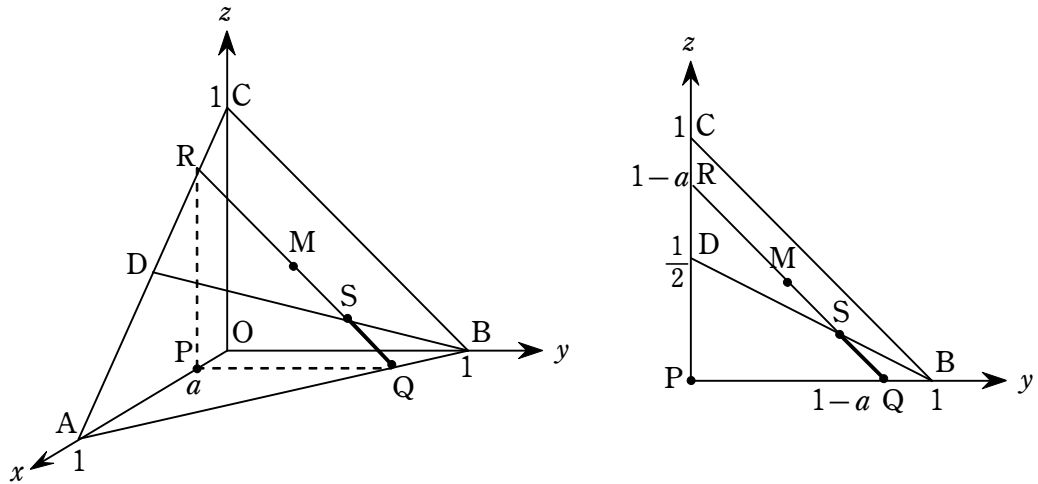


第5問

座標空間内に3点  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$ ,  $C(0, 0, 1)$  をとり,  $D$  を線分  $AC$  の中点とする。三角形  $ABD$  の周および内部を  $x$  軸のまわりい1回転させて得られる立体の体積を求めよ。

解説・略解



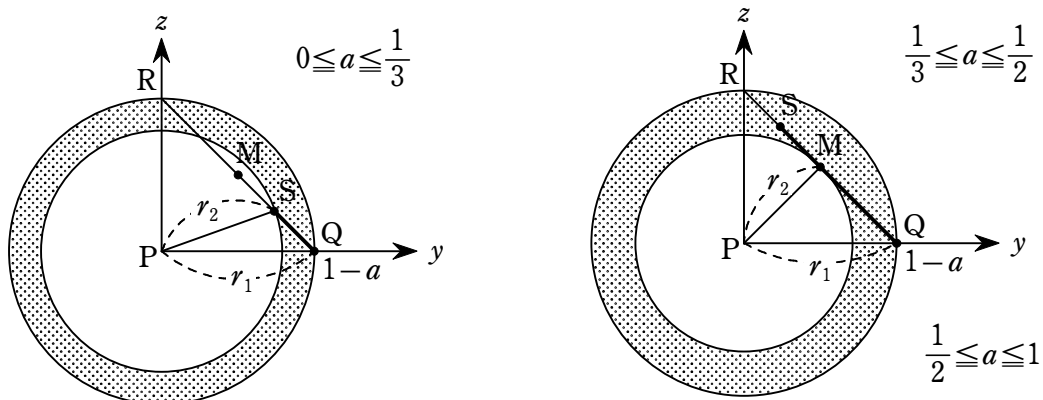
$x$  軸に垂直な平面  $x=a$  ( $0 \leq a \leq 1$ ) と線分  $AO$ ,  $AB$ ,  $AC$  との交点をそれぞれ  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  とし,  $QR$  の中点を  $M$  とすると,

$$P(a, 0, 0), Q(a, 1-a, 0), R(a, 0, 1-a), M\left(a, \frac{1-a}{2}, \frac{1-a}{2}\right)$$

$QR$  と  $BD$  の交点を  $S$  とすると,  $QR \parallel BC$  から  $S$  は2点  $B(0, 1, 0)$ ,  $D\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$  を結ぶ線分

を  $CR : RD = a : \frac{1}{2} - a$  の比に内分する点だから  $S(a, 1-2a, a)$  である。また,  $S$  と  $M$  が

一致するのは  $1-2a=a$  から  $a=\frac{1}{3}$  のときである。



問題の立体の, 平面  $x=a$  による断面は,  $P$  を中心とする2つの円にはさまれた部分になる。大小の円の半径をそれぞれ  $r_1$ ,  $r_2$  とすると

$S$  はない  
 $QR$  が回転

$$r_1 = PQ = 1 - a$$

$$r_2 = \begin{cases} PS = \sqrt{(1-2a)^2 + a^2} & \left(0 \leq a \leq \frac{1}{3}\right) \\ PM = \frac{1-a}{\sqrt{2}} & \left(\frac{1}{3} \leq a \leq 1\right) \end{cases}$$

求める体積は  $\int_0^1 (\pi r_1^2 - \pi r_2^2) da = \pi \int_0^1 r_1^2 da - \pi \int_0^1 r_2^2 da$

第1項, 第2項をそれぞれ  $V_1, V_2$  とすると

$$\frac{V_1}{\pi} = \int_0^1 r_1^2 da = \int_0^1 (1-a)^2 da = \left[ -\frac{(1-a)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

←  $V_1$  は円錐の体積として  
求めることもできる

$$\begin{aligned} \frac{V_2}{\pi} &= \int_0^1 r_2^2 da = \int_0^{\frac{1}{3}} \{(1-2a)^2 + a^2\} da + \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{(1-a)^2}{2} da \\ &= \left[ a - 2a^2 + \frac{5}{3}a^3 \right]_0^{\frac{1}{3}} + \left[ -\frac{(1-a)^3}{6} \right]_{\frac{1}{3}}^1 = \frac{14}{81} + \frac{4}{81} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

したがって  $V_1 - V_2 = \frac{1}{3}\pi - \frac{2}{9}\pi = \frac{\pi}{9}$

### 感想

S の座標は,  $x$  軸に平行な平面の方程式  $y+2z=1, y+z=1-a$  から求める方が昔(昭和)の人間には馴染み深いです。立体図形は軸方向から見た図を描け, 回転体の体積は  $\frac{V}{\pi}$  として計算するもんだ, と教わりました。円錐から空洞の体積を引くというのも, 計算量はそれほど変わりませんが, ちょっと良くないとは思いませんか。