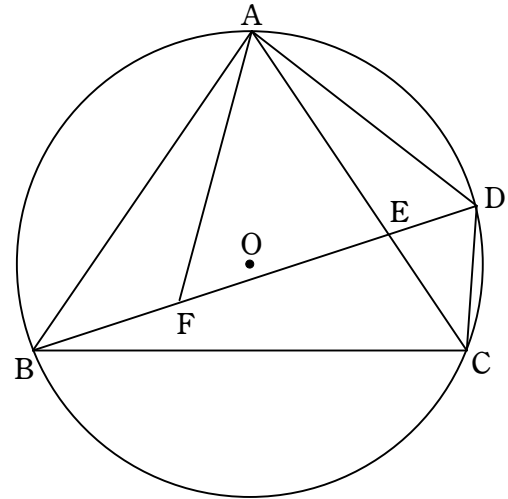


4 右の図で、4点 A, B, C, D は円 O の周上にあり、 $AB=AC$  である。点 E は線分 BD と線分 AC との交点である。点 F は線分 BD 上にあり、 $CD=BF$  である。各問いに答えよ。



- (1)  $\triangle ABF \cong \triangle ACD$  を証明せよ。
- (2)  $\angle BAC = a^\circ$  とするとき、 $\angle ACB$  の大きさを  $a$  を用いて表せ。
- (3)  $AB=5$  cm,  $BD=6$  cm,  $CD=2$  cm のとき、
  - ① 線分 AD の長さを求めよ。
  - ②  $\triangle ABF$  の面積は  $\triangle AED$  の面積の何倍か。

略解

(1)  $\triangle ABF$  と  $\triangle ACD$  において

$$AB=AC, BF=CD, \angle ABF=\angle ACD \quad (\widehat{AD} \text{ の円周角})$$

2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABF \cong \triangle ACD$$

(2)  $\angle BAC = a^\circ$  とするとき、

$$\angle ACB = 90^\circ - \frac{a^\circ}{2}$$

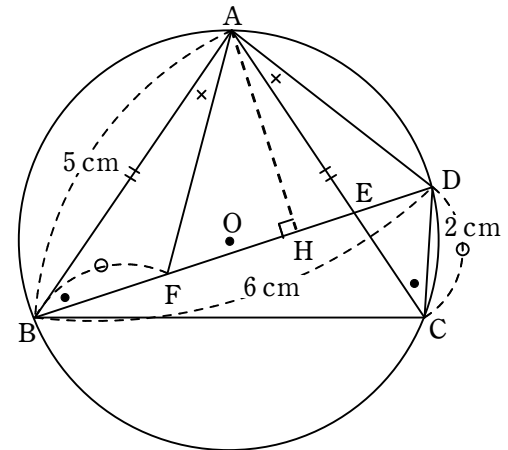
(3) ①  $\triangle ABF \cong \triangle ACD$  から  $AF=AD$

A から BD に垂線をひき、交点を H とすると

H は FD の中点だから  $FH=HD=2$

$$AH = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$$

$$AD = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \quad \dots\dots(\text{答})$$



②  $\triangle ABF \cong \triangle ACD$  から  $\angle BAC = \angle FAD$  だから  $\triangle ABC \sim \triangle AFD$

$$BC : FD = AC : AD = 5 : \sqrt{13} \quad \text{よって} \quad BC = FD \times \frac{5}{\sqrt{13}} = \frac{20}{\sqrt{13}}$$

$$\triangle EAB \sim \triangle EDC \quad \text{から} \quad EA : ED = AB : DC = 5 : 2$$

$$\triangle EAD \sim \triangle EBC \quad \text{から} \quad ED : EC = AD : BC = \sqrt{13} : \frac{20}{\sqrt{13}} = 13 : 20$$

$$\text{これらから} \quad EA : ED : EC = 65 : 26 : 40 \quad \text{すなわち} \quad EA : EC = 65 : 40 = 13 : 8$$

$$\text{したがって} \quad \triangle ABF : \triangle AED = \triangle ACD : \triangle AED = AC : AE = 21 : 13$$

すなわち  $\triangle ABF$  の面積は  $\triangle AED$  の面積の  $\frac{21}{13}$  倍である。

別解 (3)②

$\triangle EAB \sim \triangle EDC$  から

$$EA : ED = EB : EC = AB : DC = 5 : 2$$

$EA = 5x, EB = 5y$  とおくと  $ED = 2x, EC = 2y$

$$AC = 5x + 2y = 5$$

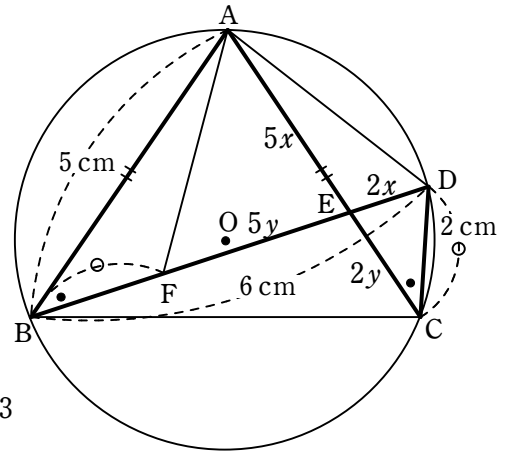
$$BD = 2x + 5y = 6$$

連立して解くと  $x = \frac{13}{21}, y = \frac{20}{21}$

$$AE : EC = 5x : 2x = \frac{65}{21} : \frac{40}{21} = 13 : 8$$

$\triangle ABF : \triangle AED = \triangle ACD : \triangle AED = AC : AE = 21 : 13$

$\triangle ABF$  の面積は  $\triangle AED$  の面積の  $\frac{21}{13}$  倍である。



感想

円に内接する四角形に関して次の性質が成り立ちます。

「四角形 ABCD が円に内接していて

4 辺の長さ  $a, b, c, d$  が与えられているとき、

$$OA : OB : OC : OD = ad : ab : cb : cd$$

$$\triangle OAB : \triangle OBC : \triangle OCD : \triangle ODA$$

$$= da^2b : ab^2c : bc^2d : cd^2a$$

$$= \frac{a}{c} : \frac{b}{d} : \frac{c}{a} : \frac{d}{b}$$

が成り立つ」

(略説明)

$\triangle OAB \sim \triangle ODC$  から  $OA : OD = OB : OC = a : c$

$\triangle OBC \sim \triangle OAD$  から  $OB : OA = OC : OD = b : d$

$\sin \angle BOC = \sin(180^\circ - \angle AOB) = \sin \angle AOB$  を用いると

$$\triangle OAB : \triangle OBC = \frac{1}{2}OA \cdot OB \sin \angle AOB : \frac{1}{2}OB \cdot OC \sin \angle BOC$$

$$= OA \cdot OB : OB \cdot OC = da^2b : ab^2c \text{ など}$$

