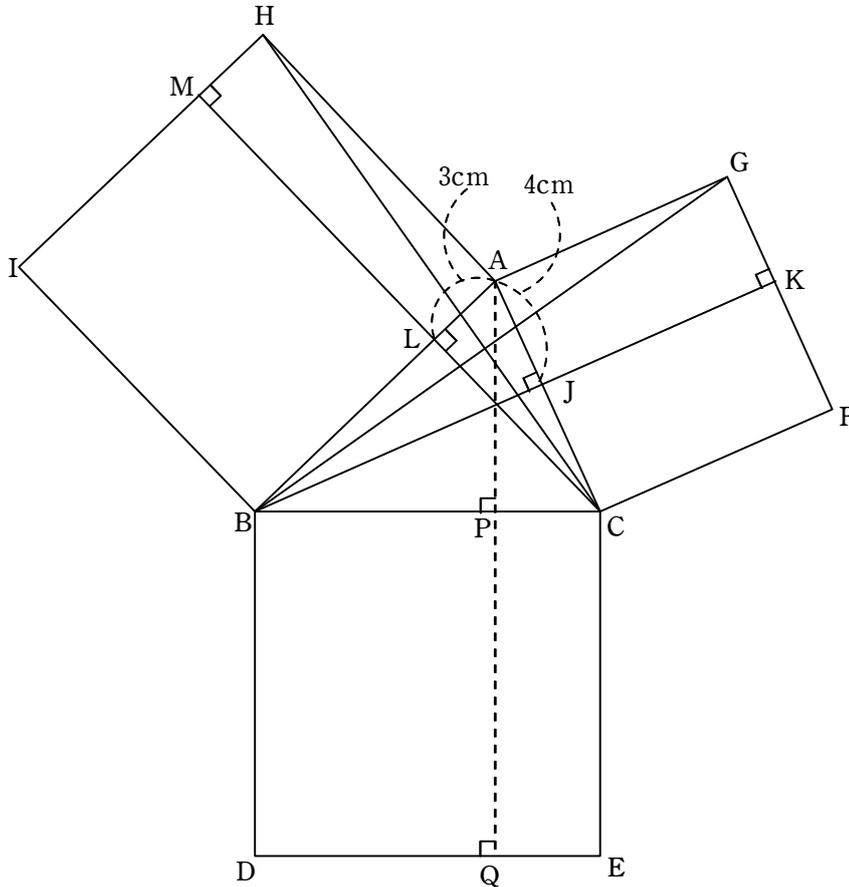


問題6 図のように、三角形ABCの各辺に正方形がくっついています。三角形ABGの面積は 18 cm^2 で、AJ、ALの長さはそれぞれ4 cm、3 cmです。

このとき、次の図形の面積はそれぞれ何 cm^2 ですか。

- (1) 四角形AJKG (2) 四角形AHML (3) 四角形BDEC



略解 (1) $AG \parallel BK$, 等積変形により $\triangle ABG = \triangle AJG = 18$, 四角形 $AJKG = 2 \times \triangle AJG = 36 (\text{ cm}^2)$

(2) $\triangle ABG$ を A を中心に時計回りに 90° 回転すると $\triangle AHC$ に重なる。

$\triangle AHC = \triangle AHL = 18$, 四角形 $AHML = 2 \times \triangle AHL = 36 (\text{ cm}^2)$

(3) (1) より正方形 $ACFG$ の一辺の長さは 9, 長方形 $JCFK = 9 \times 5 = 45$

(2) より正方形 $AHIB$ の一辺の長さは 12, 長方形 $LMIB = 12 \times 9 = 108$

A から BC に垂線をひき BC, DE との交点を P, Q とする。

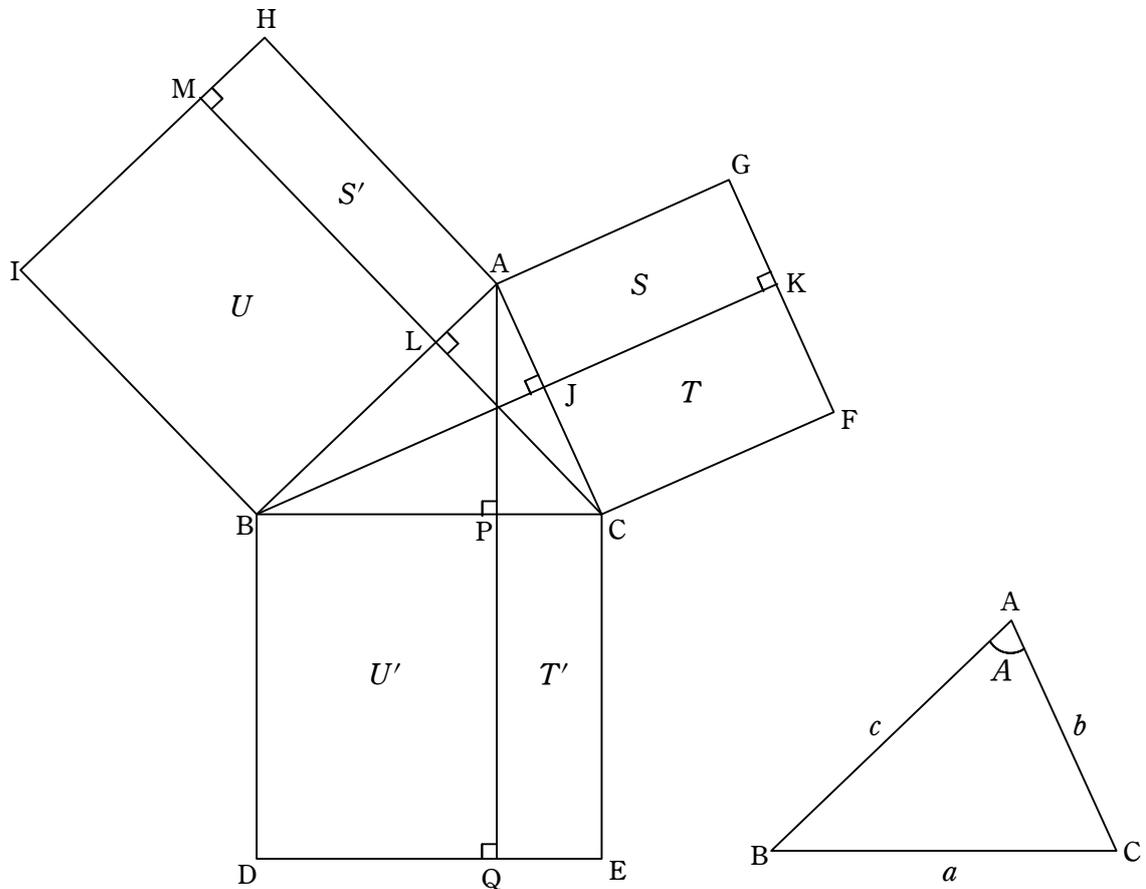
長方形 $PQEC =$ 長方形 $JCFK$ を示す。

$\triangle JCF = \triangle BCF = \triangle ECA = \triangle ECP$ から 長方形 $PQEC =$ 長方形 $JCFK$

同様にして 長方形 $BDPQ =$ 長方形 $LMIB$ したがって

四角形 $BDEC = 45 + 108 = 153 (\text{ cm}^2)$

感想 下の図の長方形の面積について、 $S=S'$ 、 $T=T'$ 、 $U=U'$ が成り立つんですね。知らなかった
ので、とても勉強になりました。問題は巧みな誘導で、このことを実質的に証明させたことにな
っているように思います。問題 (1)、(2) の本質が $S=S'$ であり $T=T'$ 、 $U=U'$ も同様だと気
付ければ大したものでしょうね。



何より驚かされたのは、この図がピタゴラスの定理の、直角三角形から鋭角三角形への一般化
になっているということです。特別な場合として $A=90^\circ$ とすれば $S=S'=0$ となって、定理そ
のままの図で、証明も同じです。

さらに、余弦定理はピタゴラスの定理を一般化したものといわれますが、まさにこの図を用
いて余弦定理を証明することができます。実際

$$AJ=c \cos A \quad \text{から} \quad JC=b-c \cos A \quad \text{よって} \quad T=b(b-c \cos A)$$

$$\text{同様に} \quad U=c(c-b \cos A) \quad \text{したがって}$$

$$a^2=b(b-c \cos A)+c(c-b \cos A)=b^2+c^2-2bc \cos A$$