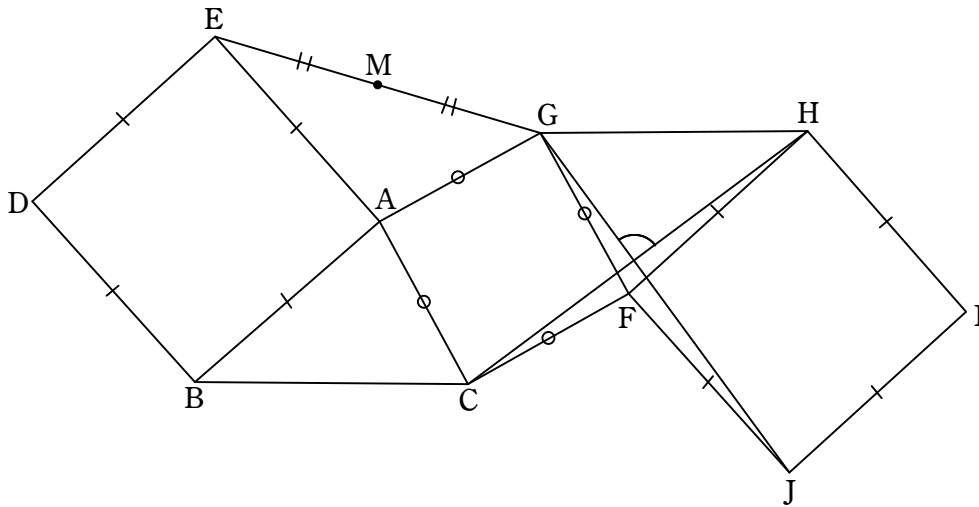


問題 4

複素数平面上に3点  $A(0)$ ,  $B(z_b)$ ,  $C(z_c)$  があり, 次のような図を考える。ただし, 図において,  $BC=L$ ,  $\triangle ABC \equiv \triangle FHG$ , 四角形はすべて正方形である。このとき, 次の各問いに答えよ。

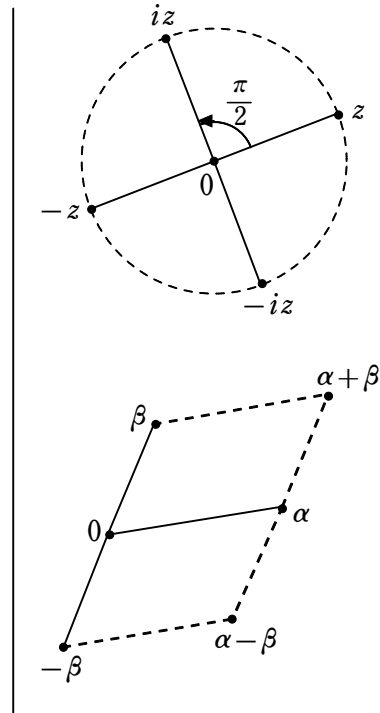
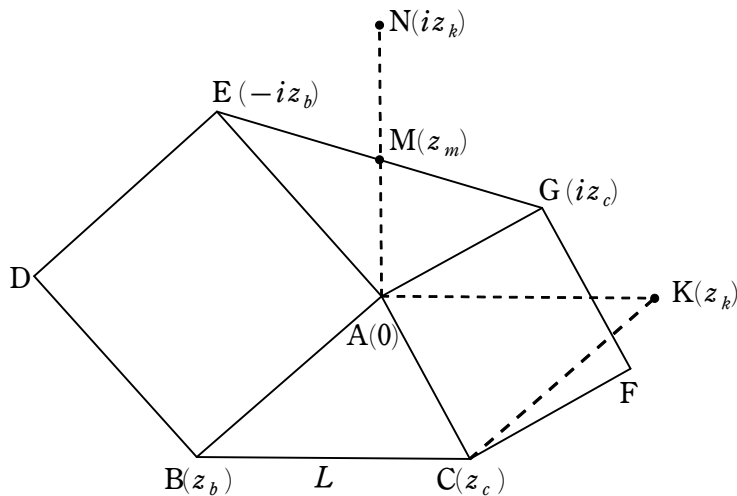


- ①  $E(z_e)$ ,  $F(z_f)$  とする。  $z_e$ ,  $z_f$  を,  $z_b$ ,  $z_c$  を用いて表せ。
- ②  $EG$  の中点を  $M$  とする。  $AM$  の長さを  $L$  を用いて表せ。また, 直線  $AM$  と  $BC$  のなす角を求めよ。
- ③ 直線  $CH$  と  $GJ$  のなす角を求めよ。

解説・解答

- ① 点  $E(z_e)$  は点  $B(z_b)$  を原点  $A(0)$  の周りに  $-\frac{\pi}{2}$  だけ回転した点であるから  $z_e = -iz_b$  ……(答)  
 $G(z_g)$  とすると,  $z_g = iz_c$  から  
 $z_f = z_c + z_g = z_c + iz_c = (1+i)z_c$  ……(答)

②



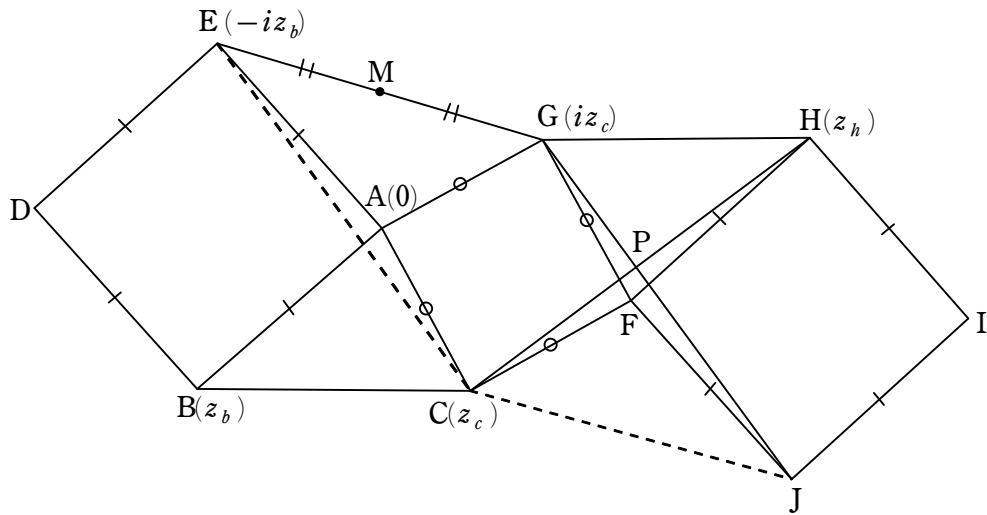
$$M(z_m) \text{ とすると } z_m = \frac{z_g + z_e}{2} = \frac{iz_c - iz_b}{2} = \frac{i(z_c - z_b)}{2}$$

$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BC}$  となる点  $K(z_k)$  をとると  $z_k = z_e - z_b$  よって  $z_m = \frac{1}{2}iz_k$

$K$  を原点  $A$  の周りに  $\frac{\pi}{2}$  だけ回転した点を  $N(iz_k)$  とすると、 $M$  は線分  $AN$  の中点、

すなわち、 $AM$  の長さは  $\frac{L}{2}$ 、直線  $AM$  と  $BC$  のなす角は  $\frac{\pi}{2}$

③



$\triangle AGE \equiv \triangle FCJ$  であるから  $\overrightarrow{JG} = \overrightarrow{CE}$  これから  $CH$  と  $CE$  のなす角を求めればよい。

$H(z_h)$  とすると、 $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{BG}$  であるから  $z_h - z_c = iz_c - z_b$

また  $z_e - z_c = -iz_b - z_c = i(iz_c - z_b) = i(z_h - z_c)$  すなわち  $\frac{z_e - z_c}{z_h - z_c} = i$

$H$  を  $C$  の周りに  $\frac{\pi}{2}$  だけ回転した点が  $E$ 、求める角は  $\frac{\pi}{2}$  である。

感想

2つの正方形の間に2つの平行四辺形  $ABQC$ ,  $GNEA$  をつくと、これらは合同で対応する対角線は垂直になる。

他にも垂直な関係が見つかる。(右図)

③では  $\triangle FCH \equiv \triangle FGJ$  で  $F$  の周りの  $\frac{\pi}{2}$  の回転で重なるから、結果は自明

であるように思われる。あるいは

$\angle PCF = \angle PGF$  から  $\angle GPC = \angle GFC$

