

問題

1

複素数  $\alpha, \beta$  が

$$|\alpha| = \sqrt{2}, |\beta| = 4, |4\alpha - \beta| = 4$$

を満たしているとする。次の問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

- (1)  $\frac{\beta}{\alpha}$  および  $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^4$  の値を求めよ。
- (2)  $|\alpha + \beta|$  の値を求めよ。ただし、絶対値の記号を用いないこと。
- (3)  $n$  は 16 で割って 3 余る整数とする。次の等式が成り立つように  $a, b$  を  $n$  の式で表せ。

$$|\alpha^n + \beta^n| = \sqrt{2^n (1 - 2^a + 2^b)}$$

- (4) 複素数平面において 3 点  $O, \alpha, \beta$  を頂点とする三角形の面積  $S$  を求めよ。

解説・解答

(1)  $\left| \frac{\beta}{\alpha} \right| = \frac{|\beta|}{|\alpha|} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$  であるから  $\frac{\beta}{\alpha} = 2\sqrt{2}\omega$  とおくと  $|\omega| = 1$  ……①

$|4\alpha - \beta| = 4$  から  $|4\alpha - 2\sqrt{2}\alpha\omega| = 4$ ,  $2\sqrt{2}|\alpha||\sqrt{2} - \omega| = 4$

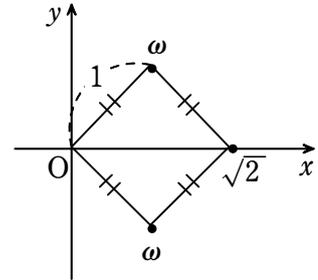
よって  $|\omega - \sqrt{2}| = 1$  ……②

①, ② から点  $\omega$  は 2 点  $O$ ,  $\sqrt{2}$  から距離が 1 で等距離である。

右図より点  $\omega$  の偏角は  $\frac{\pi}{4}$  または  $-\frac{\pi}{4}$  だから

$$\omega = \cos\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$$

したがって  $\frac{\beta}{\alpha} = 2\sqrt{2}\omega = 2 \pm 2i$  ……(答)



$$\omega^4 = \left\{ \cos\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) \right\}^4 = \cos(\pm\pi) + i\sin(\pm\pi) = -1$$

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^4 = (2\sqrt{2})^4 \omega^4 = -64 \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2)  $|\alpha + \beta| = |\alpha + 2\sqrt{2}\alpha\omega| = |\alpha||1 + 2\sqrt{2}\omega| = \sqrt{2}|3 \pm 2i|$   
 $= \sqrt{2}\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{26}$  ……(答)

(3)  $k$  を整数とすると  $n = 16k + 3$  と表される。 $\omega^4 = -1$  だから  $\omega^8 = 1$

$$\omega^n = (\omega^8)^{2k} \cdot \omega^3 = \omega^3 = \cos\left(\pm\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pm\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{-1 \pm i}{\sqrt{2}}$$

$$|\alpha^n + \beta^n| = |\alpha^n + (2\sqrt{2})^n \alpha^n \omega^n| = |\alpha^n| \left| 1 + (2\sqrt{2})^n \cdot \frac{-1 \pm i}{\sqrt{2}} \right| = 2^{\frac{n}{2}} \left| 1 - 2^{\frac{3n-1}{2}} + 2^{\frac{3n-1}{2}} i \right|$$

$$= 2^{\frac{n}{2}} \sqrt{\left(1 - 2^{\frac{3n-1}{2}}\right)^2 + \left(2^{\frac{3n-1}{2}}\right)^2} = \sqrt{2^n \left(1 - 2^{\frac{3n+1}{2}} + 2^{3n}\right)}$$

したがって  $a = \frac{3n+1}{2}$ ,  $b = 3n$  ……(答)

(4) 2 点を  $A(\alpha)$ ,  $B(\beta)$  とすると,  $\angle AOB = \frac{\pi}{4}$  だから

$$S = \frac{1}{2} |\alpha| |\beta| \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2 \quad \dots\dots(\text{答})$$

感想

(1) は点  $\alpha$  に対する点  $\beta$  の位置 (回転角) が問題だから, 図形的に考えてみました。解答のみで途中の計算が問われなければ  $\alpha$  を実軸上にあるとして考えることで時間短縮になると思われます。(4) は右図の直角二等辺三角形の面積の  $\frac{1}{4}$

