

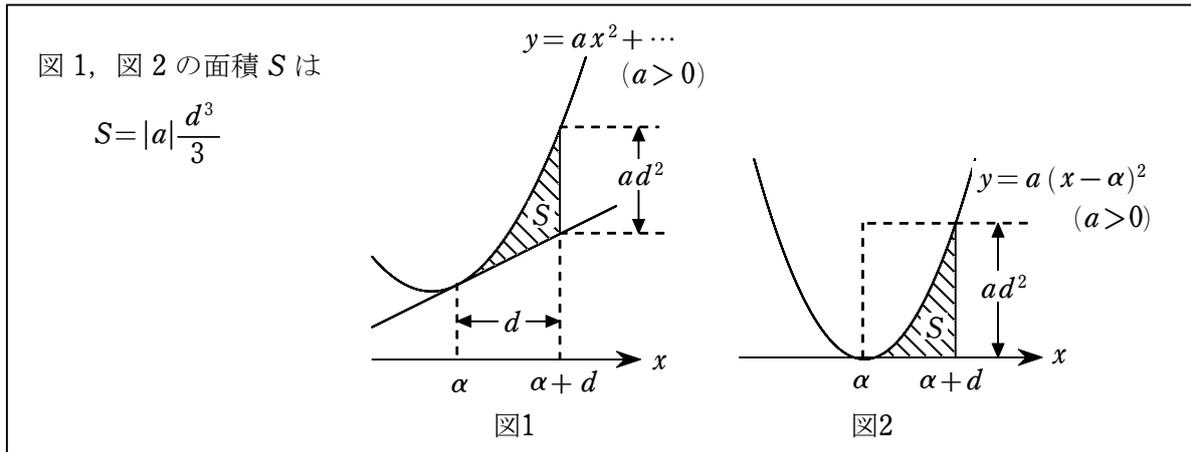
問題 2

2つの放物線 $C_1: y=x^2+2(k+1)x+4k+3$ と $C_2: y=x^2+2(k-1)x-4k+3$ があり、直線 l が2つの放物線の両方に接している。ただし、 k は実数とする。次の問いに答えよ。

- (1) 直線 l の方程式を求めよ。
- (2) C_1 と C_2 および直線 l により囲まれた部分の面積を求めよ。

解説・解答

放物線と接線で囲まれた図のような図形の面積は次式で表される。



- (1) C_1, C_2, l の関数を $f_1(x), f_2(x), g(x)$ とすると

$$f_1(x) = (x+k+1)^2 - k^2 + 2k + 2$$

$$f_2(x) = (x+k-1)^2 - k^2 - 2k + 2$$

から C_1, C_2 の頂点は

$$A_1(-k-1, -k^2+2k+2), A_2(-k+1, -k^2-2k+2)$$

C_1, C_2 は x^2 の係数が1で同じ形だから平行移動で移り、頂点は頂点に、接点は接点に移る。

$\overrightarrow{A_1A_2} = (2, -4k)$ だから l の傾きは $\frac{-4k}{2} = -2k$

C_1 と l の接点の x 座標は $f_1'(x) = -2k$ から

$$2x + 2(k+1) = -2k \quad \text{よって} \quad x = -2k - 1$$

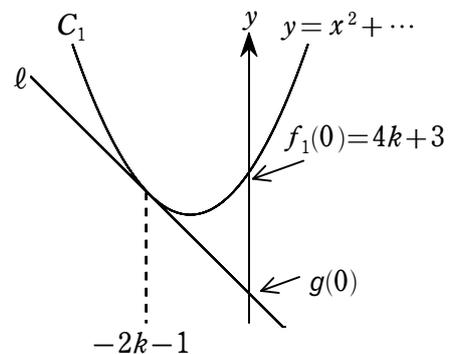
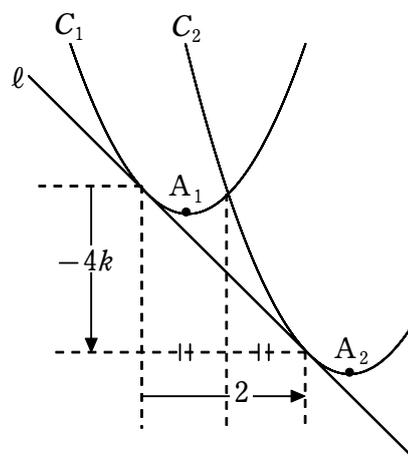
C_1 と l の接点の x 座標を求める2次方程式 $f_1(x) - g(x) = 0$

は重解 $x = -2k - 1$ をもつから $f_1(x) - g(x) = (x + 2k + 1)^2$

$$f_1(0) - g(0) = (2k + 1)^2 \quad \text{から} \quad g(0) = -4k^2 + 2$$

l の方程式は $y = -2kx - 4k^2 + 2$

- (2) (略解) $\frac{1}{3} \cdot 1^3 \times 2 = \frac{2}{3}$



感想

平行移動と2乗に比例することを意識して解答しました。