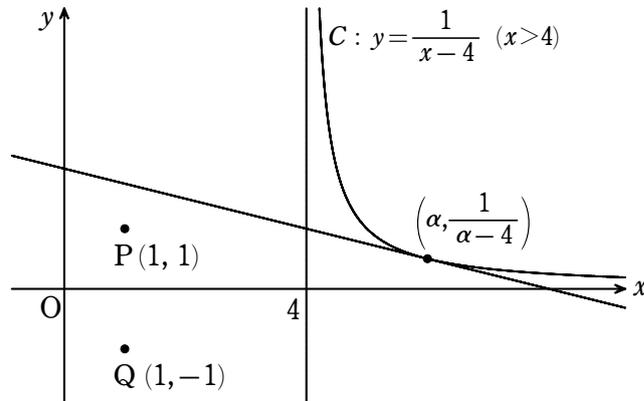


問題 2

解説・解答



(1)

$$y = \frac{1}{x-4} \text{ から } y' = -\frac{1}{(x-4)^2}, \quad \text{曲線 } C \text{ 上の点 } \left(\alpha, \frac{1}{\alpha-4}\right) \text{ における接線は}$$

$$y - \frac{1}{\alpha-4} = -\frac{1}{(\alpha-4)^2}(x-\alpha) \text{ から } y = -\frac{1}{(\alpha-4)^2}x + \frac{2\alpha-4}{(\alpha-4)^2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\alpha > 4$ であるから $x=1$ のとき $y = \frac{2\alpha-5}{(\alpha-4)^2} > 0$ であり, $y = -1$ となる実数 α は存在しない。

すなわち曲線 C の接線で Q を通るものは存在しない。

(2)

接線 ① が点 $P(1, 1)$ を通るとき $1 = -\frac{1}{(\alpha-4)^2} + \frac{2\alpha-4}{(\alpha-4)^2}$ これから

$$\alpha^2 - 10\alpha + 21 = 0, \quad \alpha > 4 \text{ だから } \alpha = 7$$

接線 l の方程式は $y = \boxed{-\frac{1}{9}x + \frac{10}{9}}$, 接点 A の座標は $\boxed{\left(7, \frac{1}{3}\right)}$

$$\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AQ} = -\frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

② の左辺は

$$\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PA} + (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{PB} \cdot (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ}) = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PQ}$$

$B\left(b, \frac{1}{b-4}\right)$ とすると, $\overrightarrow{PB} = \left(b-1, \frac{1}{b-4} - 1\right)$, $\overrightarrow{PQ} = (0, -2)$ となり ② は

$$\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PQ} = -\frac{2}{3} \text{ であるから } \left(\frac{1}{b-4} - 1\right)(-2) = -\frac{2}{3}$$

よって $\frac{1}{b-4} = \frac{4}{3}$, $b = \frac{19}{4}$, 点 B の座標は $\boxed{\left(\frac{19}{4}, \frac{4}{3}\right)}$

(3)

A, B, R, S の x 座標を x_A, x_B, x_R, x_S とすると

$$x_S = \frac{x_A + 2x_R}{3}, \quad u = \frac{3x_S + 2x_B}{5} = \frac{x_A + 2x_R + 2x_B}{5}$$

$$\text{よって } u = \frac{7 + 2 \cdot \frac{19}{4} + 2(t+4)}{5} = \boxed{\frac{4t+49}{10}}$$

y 座標についても同様にして

$$v = \frac{\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{4}{3} + 2 \cdot \frac{1}{t}}{5} = \frac{3t+2}{5t}$$

また

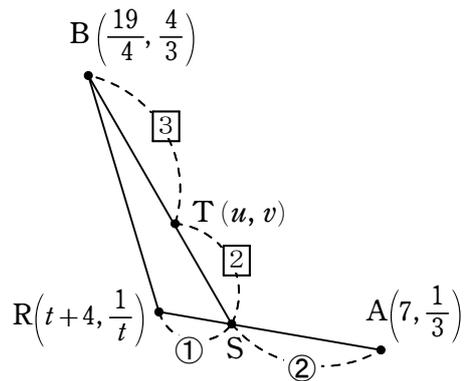
$$uv = \frac{(4t+49)(3t+2)}{10 \cdot 5t} = \frac{12t^2 + 155t + 98}{50t} = \frac{12t + \frac{98}{t} + 155}{50}$$

ここで $t+4 > 4$ から $t > 0$ であるから、相加・相乗平均の大小関係により

$$12t + \frac{98}{t} \geq 2\sqrt{12t \cdot \frac{98}{t}} = 28\sqrt{6}$$

uv が最小となるのは $12t + \frac{98}{t}$ が最小となるときで、このとき

$$12t = \frac{98}{t} \quad \text{から} \quad t^2 = \frac{49}{6}, \quad t > 0 \quad \text{であるから} \quad t = \boxed{\frac{7}{\sqrt{6}}}$$



感想

(1) $y = \frac{1}{x-4}$ ($x > 4$) は減少関数だから接線の傾きは負、 $x > 4$ かつ $y > 0$ の領域にある点を通り傾きが負の直線は、 $x \leq 4$ かつ $y \leq 0$ の領域を通らないことは自明に思われるので、どういう証明が望ましいのか迷うところです。(2) で接線の方程式を使うので、上のような証明を考えてみました。接線の方程式では、曲線 C 上の動点やその座標を表すのに適当な名を思いつけなかったので (P, \dots, t, \dots が使われていて) 少々悩ましかったです。

(2) ② の左辺が簡単になることに気付けないとなかなか厳しいでしょうね。

(3) $u = \frac{x_A + 2x_R + 2x_B}{5}$ のように、 T の座標は A, B, R の座標の重み付き平均で表されます。

x_A, x_B, x_R の係数について、 $\triangle TBR : \triangle TRA : \triangle TAB = 1 : 2 : 2$ と関連することを知っていると計算の確認になるかも知れません。 R の座標が $(t, \frac{1}{t-4})$ でなく $(t+4, \frac{1}{t})$ であるのは相加・相乗平均の大小関係に気付かせる親切心でしょうか。

問題 2 は全体として様々な題材の小問集合のようですか、なにげに繋がっているので、途中のミスは致命的になりますね。気を付けたいものです。