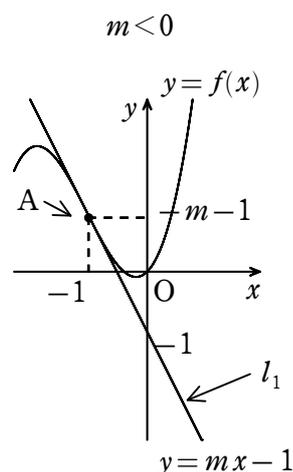
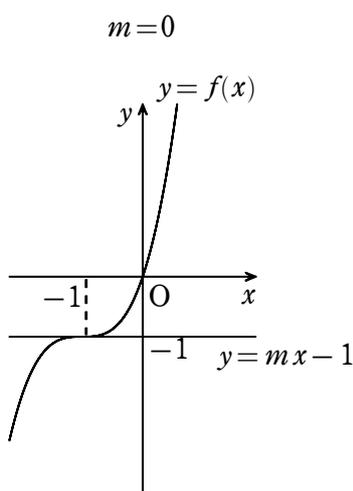
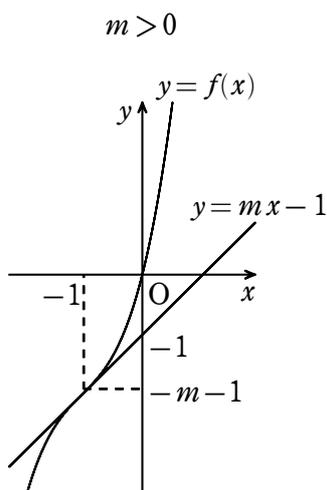
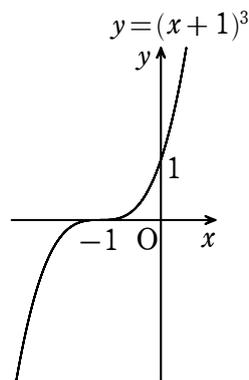


問題

3 3次関数 $f(x)=x^3+3x^2+(m+3)x$ が極値をもつとき、次の問いに答えよ。

- (1) 定数 m の値の範囲を求めよ。
- (2) $y=f(x)$ の傾きが m である接線を l_1 とする。 l_1 の方程式、およびその接点 A の座標を m を用いて表せ。
- (3) 点 A において l_1 と直交する直線を l_2 とする。 $y=f(x)$ と l_2 の交点のうち x 座標の最も小さい点の x 座標を α とするとき、 α の最大値とそのときの m の値を求めよ。

解説 $f(x)$ を立方完成すると $f(x)=(x+1)^3+mx-1$ となるから、 $y=f(x)$ は $y=(x+1)^3$ と $y=mx-1$ を足し合わせたものと考えられる。グラフの概形は $m>0$, $m=0$, $m<0$ によって下図のように変わり、 $y=f(x)$ が極値をもつのは $m<0$ のときである。接線の傾きの最小が m のときで、求める接線 l_1 は $y=mx-1$ そのもので、接点 A の座標は $(-1, -m-1)$ である。 A は変曲点、対称の中心でもある。



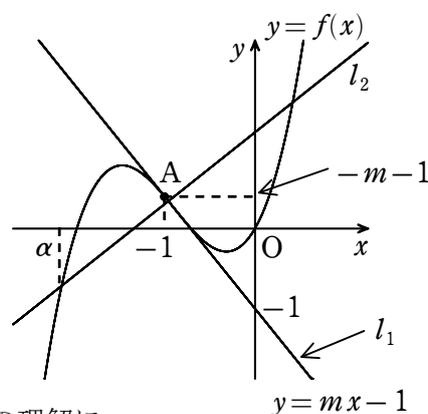
点 A において l_1 と直交する直線 l_2 の方程式は $y = -\frac{1}{m}(x+1) - m - 1$, $y=f(x)$ との交点は

$$(x+1)^3 + mx - 1 = -\frac{1}{m}(x+1) - m - 1 \quad \text{の実数解}$$

$$(x+1)\left\{(x+1)^2 + m + \frac{1}{m}\right\} = 0 \quad \text{から}$$

$$\alpha = -1 - \sqrt{-m - \frac{1}{m}} \quad (-m > 0)$$

$$-m - \frac{1}{m} \geq 2\sqrt{(-m)\left(-\frac{1}{m}\right)} = 2 \quad \text{だから} \quad \alpha \leq -1 - \sqrt{2}$$



感想 上記は解答例にはならないと思いますが、3次関数の性質の理解につながるとい思い解説しました。