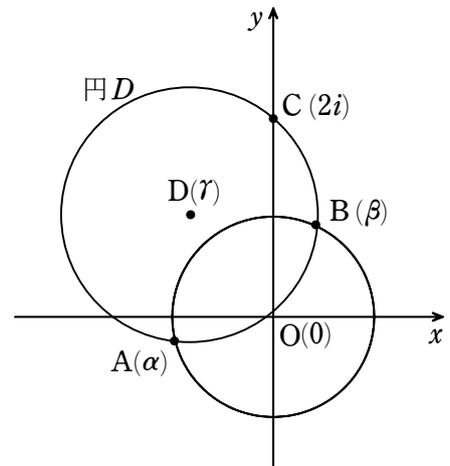


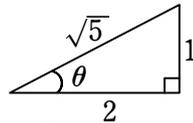
問題Ⅲ

解説・解答

4点  $O(0)$ ,  $A(\alpha)$ ,  $B(\beta)$ ,  $C(2i)$  を通る円の方程式は  $|z-\gamma|=d$  であるから、中心は点  $\gamma$ , 半径は  $d$ , ここで  $D(\gamma)$  とし、この円を円  $D$  とする。 $|\alpha|=|\beta|=1$  より点  $A, B$  は原点  $O$  中心、半径 1 の円周上にある。



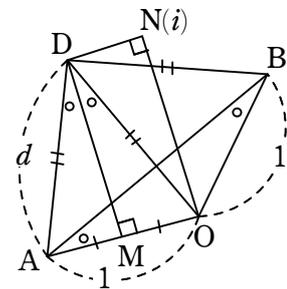
(1)  $4(2+i)\alpha=5(\alpha-\beta)$



から  $\frac{\alpha-\beta}{\alpha}=\frac{4}{5}(2+i)=\frac{4}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2+i}{\sqrt{5}} \dots\dots ①$

$\frac{2+i}{\sqrt{5}}=\cos\theta+i\sin\theta$  から  $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}=\boxed{\frac{\sqrt{5}}{5}}$

(2) ① から  $\frac{\beta-\alpha}{0-\alpha}$  の偏角が  $\theta$ , よって  $A$  の周りで直線  $AO$  を  $\theta$  だけ回転した直線が  $AB$  だから  $\angle OAB=\theta$ ,  $OA=OB$  より  $\angle OBA=\theta$ , 円  $D$  の円周角と中心角の関係から  $\angle ADO=2\theta$   
 $AO$  の中点を  $M$  とすると



$DA\sin\theta=AM$  から  $d=\frac{AM}{\sin\theta}=\boxed{\frac{\sqrt{5}}{2}}$

$\gamma$  の実部を  $x$  ( $x<0$ ) とすると,  $D$  は 2 点  $O, C$  から等距離にあるから  $\gamma=x+i$  とおける。

$|\gamma|=d$  から  $\sqrt{x^2+1}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ ,  $x<0$  から  $x=-\frac{1}{2}$  よって  $\gamma=-\frac{1}{2}+i=\boxed{\frac{-1+2i}{2}}$

(3)  $DM=DA\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=1$

$N(i)$  とすると四角形  $DMON$  は 2 組の対辺が等しく平行四辺形となるから, 辺  $OM$  は実軸上よって  $\alpha=-1$  である。① を用いると

$\frac{-1-\beta}{-1}=\frac{4}{5}(2+i)$  から  $\beta=\frac{4}{5}(2+i)-1=\boxed{\frac{3+4i}{5}}$

(4)  $|z-\gamma|=d$  において  $w=\frac{1}{z}$  のとき  $|\frac{1}{w}-\gamma|=d$ , 両辺に  $|\frac{w}{\gamma}|$  をかけると

$|\frac{1}{\gamma}-w|=\frac{d|w|}{|\gamma|}$ ,  $|\gamma|=d$  を用いると  $|w-\frac{1}{\gamma}|=|w|$

すなわち, 点  $w$  は 2 点  $\frac{1}{\gamma}$ ,  $O$  から等距離にあるから, この 2 点を結ぶ線分の垂直二等分線を描く。点  $\frac{1}{\gamma}$  は

$\frac{1}{\gamma}=\frac{2}{-1+2i}=\boxed{\frac{-2-4i}{5}}$

感想 式のもつ図形的意味を読み取ることが大切だと思いました。図形の性質も積極的に使うとよいでしょう。