

数学Ⅲ

複素数平面上において、4点 $O(0)$, $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(2i)$ は同一円周上に存在し、複素数 α, β は $|\alpha| = |\beta| = 1$, $4(2+i)\alpha = 5(\alpha - \beta)$ を満たしている。また、この円を方程式 $|z - \gamma| = d$ を満たす点 z 全体の集合として表したとき、複素数 γ の実部は負となるものとする。

$$(1) \frac{\alpha - \beta}{\alpha} \text{ の偏角を } \theta \text{ とするとき、} \sin \theta = \frac{\sqrt{\begin{array}{|c|c|} \hline (50) & (51) \\ \hline \end{array}}}{\begin{array}{|c|c|} \hline (52) & (53) \\ \hline \end{array}} \text{ である。}$$

$$(2) d = \frac{\sqrt{\begin{array}{|c|c|} \hline (54) & (55) \\ \hline \end{array}}}{\begin{array}{|c|c|} \hline (56) & (57) \\ \hline \end{array}}, \quad \gamma = \frac{\begin{array}{|c|c|} \hline (58) & (59) \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline (60) & (61) \\ \hline \end{array} i}{\begin{array}{|c|c|} \hline (62) & (63) \\ \hline \end{array}} \text{ である。}$$

$$(3) \beta = \frac{\begin{array}{|c|c|} \hline (64) & (65) \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline (66) & (67) \\ \hline \end{array} i}{\begin{array}{|c|c|} \hline (68) & (69) \\ \hline \end{array}} \text{ である。}$$

(4) z が三角形 ABC の外接円から点 O を除いた円周上を動くとき、 $w = \frac{1}{z}$ が描く図形は点 $P\left(\frac{\begin{array}{|c|c|} \hline (70) & (71) \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline (72) & (73) \\ \hline \end{array} i}{\begin{array}{|c|c|} \hline (74) & (75) \\ \hline \end{array}}\right)$ と点 O を結ぶ線分の垂直二等分線である。