

第1問

解説・解答

(1) $Q(b, b^2)$, $R(c, c^2)$ とする。

$y=x^2$ から $y'=2x$, ℓ の方程式は

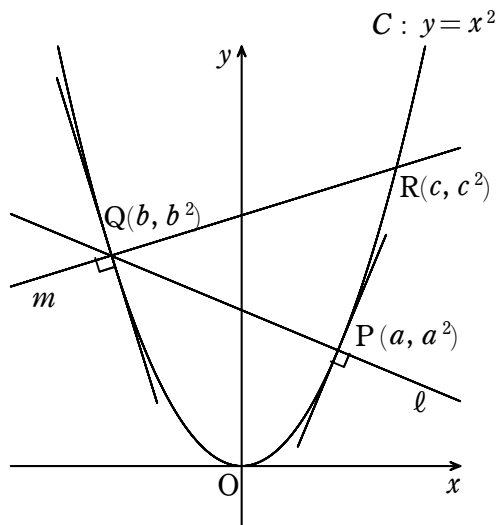
$$y-a^2 = -\frac{1}{2a}(x-a) \text{ から } y = -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2}$$

ℓ と C の P と異なる交点 Q の x 座標 b は

$$x^2 = -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2} \text{ から}$$

$$(x-a)\left(x+a+\frac{1}{2a}\right) = 0 \text{ を解いて}$$

$$b = -a - \frac{1}{2a} \text{ ……(答)}$$



(2) (1) で a から b を求めたのと同様にして $c = -b - \frac{1}{2b}$

b の最小値について, $a > 0$ のとき $a + \frac{1}{2a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{2a}} = \sqrt{2}$ であるから

$$b = -\left(a + \frac{1}{2a}\right) \leq -\sqrt{2}$$

$b' = -b$ とおくと $b' \geq \sqrt{2}$, このとき

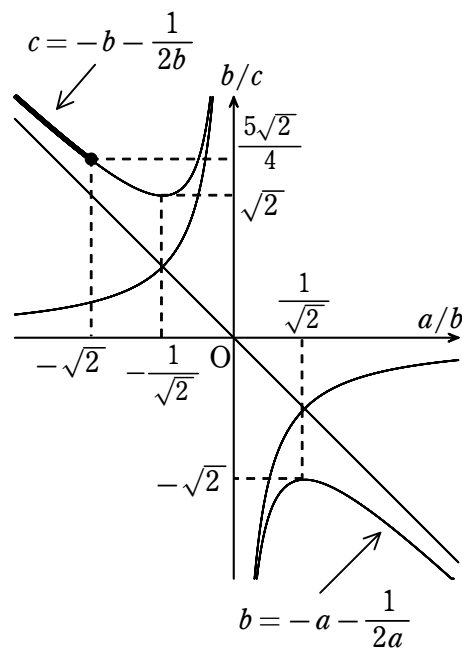
$$c = -b - \frac{1}{2b} = b' + \frac{1}{2b'} = \left(\sqrt{b'} - \frac{1}{\sqrt{2b'}}\right)^2 + \sqrt{2}$$

$b' > 0$ のとき $\sqrt{b'} - \frac{1}{\sqrt{2b'}}$ は b' の増加関数,

$b' \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ では $\left(\sqrt{b'} - \frac{1}{\sqrt{2b'}}\right)^2$ は増加するから,

$b' = \sqrt{2}$ のとき c は最小値をとり

$$c = b' + \frac{1}{2b'} \geq \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{4} \text{ ……(答)}$$



感想

$b = -a - \frac{1}{2a}$ のような関数はよく現れるので, 2つの

関数 $b = -a$ と $b = -\frac{1}{2a}$ の「足し合わせ」と考えて増減

は議論してもよいのではないのでしょうか(右図)。極値は相加・相乗平均の大小関係で求めることにして。